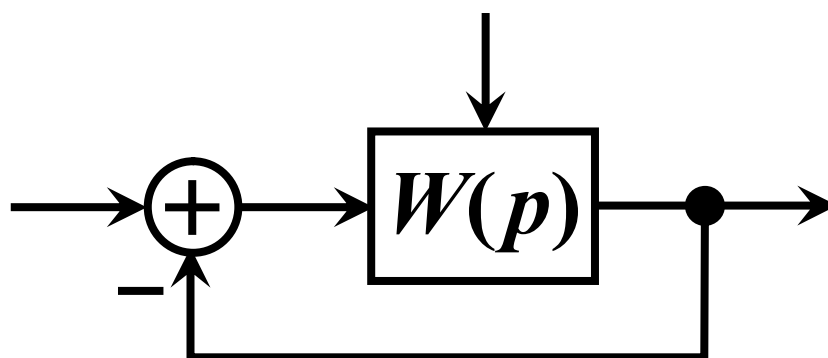


Г.А. БЕЛОВ

**ТЕОРИЯ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Линейные непрерывные системы



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Г.А. Белов

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**
Линейные непрерывные системы

Учебное пособие

Чебоксары
Издательство Чувашского университета
2011

УДК 621.382

Б 43

Рецензенты:

кафедра управления и информатики в технических системах Чебоксарского политехнического института (филиала) ГОУ ВПО «Московский государственный открытый университет» (зав. кафедрой, канд. техн. наук, профессор *О.Н. Зайцев*)

главный научный сотрудник ОАО «ВНИИР», д-р техн. наук, профессор *А.Г. Иванов*

Ответственный редактор:

канд. техн. наук, доцент *А.В. Серебрянников*

Белов Г.А.

Б 43 Теория автоматического управления. Линейные непрерывные системы: учеб. пособие. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011. – 288 с.

ISBN 978-5-7677-1315-8

Рассматриваются линейные непрерывные системы автоматического управления.

Для студентов и аспирантов, обучающихся по направлению «Электроника и микроэлектроника» и другим электротехническим специальностям при изучении дисциплины «Теория автоматического управления».

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7677-1315-8

УДК 621.382
© Белов Г.А., 2011

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость в учебных пособиях, адаптированных к принятым в университете учебным планам и программам, остро ощущается в связи с тем, что до половины часов, отводимых на изучение дисциплины, выделяется на самостоятельную работу студентов по этой дисциплине. Даже только внимательно просмотрев такое пособие, студент будет иметь возможность оценить, что из излагаемого материала давалось на лекциях, а что нет, какие вопросы рассматривались на практических и лабораторных занятиях. Тогда студент сможет наметить для себя, какие именно темы нужно будет изучить самостоятельно.

Учебное пособие необходимо также для более глубокого изучения тем, рассматриваемых на лекциях, восполнения того, что студент не успел зафиксировать на лекциях.

В предлагаемом учебном пособии кратко рассматривается сущность проблемы автоматического управления, фундаментальные принципы и основные виды автоматического управления, подробно излагаются вопросы теории линейных непрерывных систем автоматического управления. Важнейшим математическим аппаратом в теории таких систем автоматического управления является преобразование Лапласа, изучаемое в курсе высшей математики и используемое в ТОЭ для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях.

Хотя теория автоматического управления (ТАУ), как видно из названия, относится к теоретическим дисциплинам, широко использующим современные математические методы, она имеет исключительно практическую направленность. Роль этой дисциплины при подготовке специалистов по техническим наукам непрерывно повышается, поскольку она призвана сформировать у студентов основы динамического подхода к изучаемым и разрабатываемым устройствам, системам и явлениям. Основной проблемой, которая изучается и решается в теории автоматического управления, является обеспечение устойчивости и высокого качества процессов в различных технических устройствах и системах. Когда этой проблеме не уделяется должного внимания, выходят из строя дорогие устройства, аппараты, начинают «плясать» мосты, происходят аварии в энергосистемах, на самолетах, кораблях и т. д.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Большая часть материала, излагаемого в этой главе, выносится на самостоятельную проработку студентами. Этот материал, хотя и имеет большое значение в формировании чрезвычайно важных понятий ТАУ, носит описательный характер, не требует знания сложных математических методов и вполне доступен для самостоятельного освоения студентами. Студент, внимательно прорабатывающий этот материал, будет обогащаться новыми, ранее неизвестными ему понятиями и знаниями, у него будет возрастать интерес к этой науке.

При изучении последующих глав будет постоянно возникать необходимость возвращения к этой главе.

1.1. Сущность проблемы автоматического управления

Теория автоматического управления – это наука, которая изучает процессы управления, методы их исследования и основы проектирования автоматических систем, работающих по замкнутому циклу, в любой области техники. Иначе говоря, она изучает процессы управления и задачи создания любых систем с обратной связью.

Целенаправленные процессы, выполняемые человеком для удовлетворения различных потребностей, представляют собой организованную совокупность действий – операций, которые делят на два класса: рабочие операции и операции управления. К *рабочим операциям* относят действия, непосредственно необходимые для выполнения процесса в соответствии с теми природными законами, которыми определяется ход процесса, например снятие стружки при обработке детали на станке, вращение вала двигателя и т. п. Замену труда человека в рабочих операциях называют *механизацией*, цель которой – освобождение человека от тяжелых операций, требующих больших затрат физической энергии (земляные работы, подъем грузов); во вредных операциях (химические, радиоактивные процессы); в однообразных, утомительных для нервной системы операциях (завинчивание однотипных винтов при сборке, заполнение боль-

шого количества типовых документов, выполнение большого объема стандартных вычислений и т. п.).

Для правильного и высококачественного выполнения рабочих операций их необходимо направлять действиями другого рода – *операциями управления*, которые обеспечивают в нужные моменты времени начало, порядок следования и прекращение отдельных операций, обеспечивают выделение необходимых для их выполнения ресурсов, задают нужные параметры самому процессу: направление, скорость, ускорение рабочего инструмента, температуру, концентрацию в химическом процессе и т. д. Совокупность управляющих операций образует процесс управления [1].

Под *управлением* понимается совокупность операций по организации некоторого процесса для достижения определенных целей.

Операции управления также частично или полностью могут выполнять технические устройства. Замену труда человека в операциях управления называют *автоматизацией*, а технические устройства, выполняющие операции управления, – *автоматическими устройствами*. Совокупность технических средств – машин, орудий труда, средств механизации, выполняющих данный процесс, – с точки зрения управления, является *объектом управления*. Совокупность средств управления и объекта образует *систему управления*. Систему, в которой все рабочие и управляющие операции выполняют автоматические устройства, называют *автоматической системой*. Систему, в которой автоматизирована только часть операций, другая же их часть (обычно наиболее ответственная) сохраняется за людьми, называют *автоматизированной (частично автоматической) системой*.

Объектами и операциями управления охватываются технические процессы и агрегаты, группы агрегатов, цехи, предприятия, людские коллективы и организации и т. д.

Всякий технический процесс характеризуется совокупностью физических величин, называемых *показателями, координатами*, а иногда параметрами процесса. Будем избегать термина «параметр» в этом смысле, так как им обычно обозначают физические константы самих устройств. Для осуществления управле-

ния и построения управляемых систем нужны знания двоякого вида: во-первых, конкретные знания данного процесса, его технологии и, во-вторых, знание принципов и методов управления, общих для самых разнообразных объектов и процессов. Конкретные, специальные знания дают возможность установить, что и как следует изменять в системе, чтобы получить требуемый результат. Будем считать, что все это задано технологами, и будем изучать, абстрагируясь от частных свойств, только общие законы и методы управления и способы их реализации.

При автоматизации возникает необходимость в различных видах операций управления. К одному из видов относятся операции начала (включения), прекращения (отключения) данной операции и перехода от одной операции к другой (переключения). Различные аспекты этих видов операций рассматриваются в теории переключающих устройств и отчасти в теории расписаний, составляющих предмет других курсов.

Другая группа операций связана с контролем за координатами с целью установления, не вышли ли они за допустимые границы. Эта группа операций состоит в измерении значений координат и выдаче результатов измерения в удобной для человека-оператора форме. Операции этой группы рассматриваются в теории автоматического контроля.

Для правильного и высококачественного ведения процесса некоторые из его координат – управляемые координаты – должны поддерживаться в определенных границах или изменяться по определенному закону. Поэтому третью группу операций управления – операции по поддержанию заданного закона изменения координат – изучают в теории автоматического управления, которой посвящена эта книга.

Необходимость в управлении значениями координат возникает в том случае, когда нормальный ход процесса нарушается из-за различного рода возмущений, т. е. колебаний нагрузки, воздействий внешней среды или внутренних помех.

Пусть $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – совокупность управляемых координат процесса. В схемах, изображенных на рис. 1.1, *а*, *б*, объект представлен прямоугольником, а управляемые координаты, или, как их часто называют, выходные величины объекта, – одиночными стрелками, если они скалярные величины x_1, x_2, \dots ,

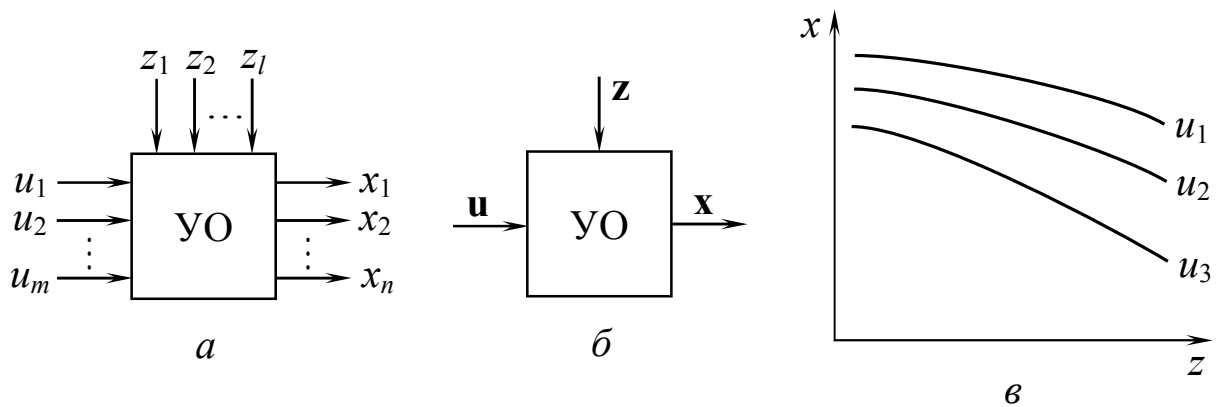


Рис. 1.1. Схематическое изображение многомерного управляемого объекта (УО) (а и б): u_1, u_2, \dots, u_m – управляющие воздействия; x_1, x_2, \dots, x_n – управляемые координаты; z_1, z_2, \dots, z_l – возмущающие воздействия; статические характеристики одномерного управляемого объекта при трех значениях u_1, u_2, u_3 управляющего воздействия u

или двойными при изображении вектора \mathbf{x} . На схеме показаны также возмущающие воздействия $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ и управляющие воздействия $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, прикладываемые к управляющему органу объекта УО, с помощью которого можно изменять координаты \mathbf{x} . Величины \mathbf{x} , \mathbf{u} и \mathbf{z} в зависимости от природы объекта связаны различными математическими зависимостями. В общем случае

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (1.1)$$

где \mathbf{A} – оператор, определяющий вид зависимости.

В общем случае оператор системы преобразует внешнее воздействие (в данном случае – это совокупность воздействий \mathbf{x} и \mathbf{z}) в выходной сигнал или выходной вектор \mathbf{x} .

В простейшем случае, когда оператором объекта управления является обычная функциональная зависимость

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (1.2)$$

объект называют *статическим* или *безынерционным*, а зависимость (1.2) или ее графическое изображение – *статической характеристикой объекта* (рис. 1.1, в).

Если объект обладает инерционностью, то изменения координат под воздействием возмущений \mathbf{z} или управлений \mathbf{u} происходят не мгновенно и в этом случае объект называют *динамическим*. Величины \mathbf{x} и \mathbf{z} в динамических объектах связаны дифференциальными, интегральными или разностными уравнениями.

Изменения координат в нормальном требуемом ходе процесса определяются совокупностью правил, предписаний или математических зависимостей, называемой **алгоритмом функционирования системы**. Алгоритм функционирования составляется на основании технологических, экономических и других требований без учета динамических искажений. В теории автоматического регулирования алгоритм функционирования считают заданным.

Алгоритм управления будет зависеть как от алгоритма функционирования, так и от динамических свойств системы.

1.2. Фундаментальные принципы управления

Зная статические и динамические свойства управления системы, можно построить математическую модель системы и найти такой алгоритм управления, который обеспечивает заданный алгоритм функционирования при известных, заданных воздействиях. Однако модель всегда приближенно выражает свойства оригинала, а возмущающие воздействия могут изменяться не известным заранее образом, поэтому и при найденном алгоритме управления фактическое поведение системы будет отличаться от желаемого, определяемого алгоритмом функционирования.

Чтобы приблизить поведение к требуемому, алгоритм управления нужно увязать не только со свойствами системы и алгоритмом функционирования, но и с фактическим функционированием системы.

В основе построения системы автоматического управления лежат некоторые общие фундаментальные принципы управления, определяющие, каким образом осуществляется увязка алгоритмов функционирования и управления с фактическим функционированием или причинами, вызывающими отклонение функционирования от заданного. В настоящее время в технике известны и используют три фундаментальных принципа: разомкнутого управления, компенсации и обратной связи.

Принцип разомкнутого управления. Сущность принципа состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контро-

лируется другими факторами – возмущениями или выходными координатами процесса. Общая функциональная схема системы показана на рис. 1.2.

Задание $x_0(t)$ алгоритма функционирования может вырабатываться как специальным техническим устройством – задатчиком программы 1, так и выполняться заранее при проектировании системы и

затем непосредственно использоваться при конструировании управляющего устройства 2. В последнем случае блок 1 на схеме отсутствует. В обоих случаях схема имеет вид разомкнутой цепочки, в которой основное воздействие передается от входного элемента к выходному элементу 3, как показано стрелками. Это и дало основание названию принципа. Близость x и x_0 в разомкнутых системах обеспечивается только конструкцией и подбором физических закономерностей, действующих во всех элементах.

Несмотря на очевидные недостатки, этот принцип используют очень широко. Элементы, представляемые разомкнутой цепью, входят в состав любой системы, поэтому принцип представляется настолько простым, что его не всегда выделяют как один из фундаментальных принципов. Этому способствует и то, что общих правил построения разомкнутых цепей можно выделить не много. Основные правила, полезные конструктору, существенно зависят от частных свойств конкретных устройств и изучаются в специальных прикладных дисциплинах по приборостроению и машиностроению.

Принцип компенсации (управление по возмущению). Если возмущающие воздействия настолько велики, что разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма функционирования, то для повышения точности иногда возможно, измерив возмущение, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования. На рис. 1.3 коррекция алгоритма управления осуществляется с помощью корректирующего устройства 4.

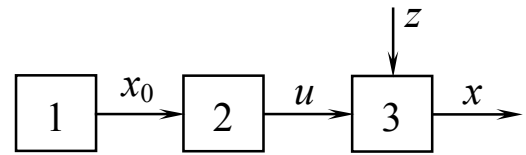


Рис. 1.2. Структурная схема разомкнутого управления:
1 – задатчик программы,
2 – управляющее устройство,
3 – выходное устройство

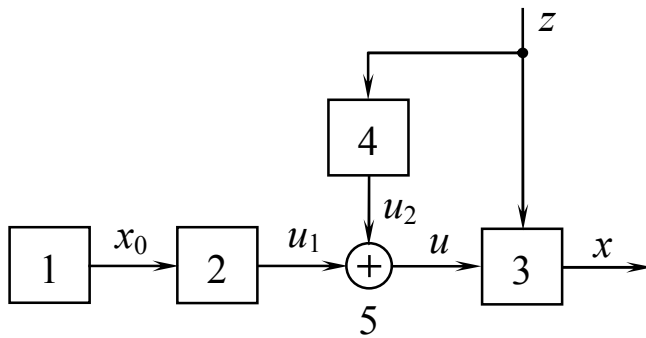


Рис. 1.3. Структурная схема регулирования по возмущению:
4 – корректирующее устройство;
5 – суммирующее звено

Так как отклонение регулируемой величины зависит не только от управляющего u , но и от возмущающего z воздействия, т. е. $x = F_1(u_1, z)$, то в принципе можно подобрать управление $u = F_2(z)$ таким образом, чтобы в установившемся режиме отклонение отсутствовало, т. е. $e = x_0 - F_1(u_1, z) = 0$.

Так, в простейшем линейном случае, если характеристика объекта в статике $x_0 = k_0 u - k_z z$, то, выбирая $u = x_0/k_0 + k_z z/k_0$, получим $x = x_0 = \text{const}$.

Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению. Систему можно построить и так, чтобы точность выполнения алгоритма функционирования обеспечивалась и без измерения возмущений. На рис. 1.4, а показана схема, в которой коррективы в алгоритм управления вносятся по фактическому значению координат в системе. Для этой цели в конструкцию системы вводят

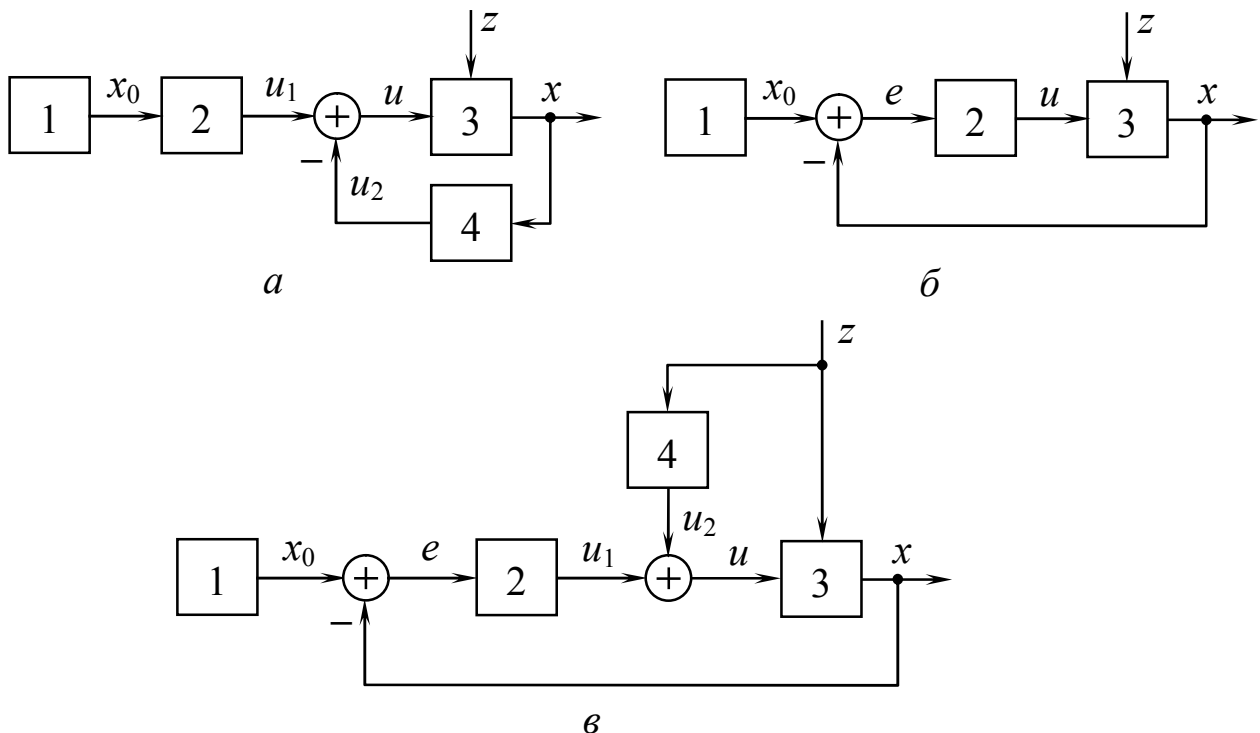


Рис. 1.4. Структурные схемы замкнутых систем управления (а и б), схема комбинированного регулирования (в);
 $e = x_0 - x$ – ошибка регулирования

дополнительную связь 4, в которую могут входить элементы для измерения x и для выработки корректирующих воздействий на управляющее устройство. Схема имеет вид замкнутой цепи, что дало основание назвать осуществляемый в ней принцип принципом управления по замкнутому контуру. Введенную дополнительную цепь 4 называют *цепью обратной связи*, так как направление передачи воздействий в дополнительной связи обратно направлению передачи основного воздействия на объект.

Схема, изображенная на рис. 1.4, а представляет собой наиболее общий вид замкнутых систем. По такой схеме строят, например, многие преобразовательные и вычислительные элементы. В управлении же наиболее широко распространен частный вид замкнутых систем, в которых коррекцию алгоритма управления осуществляют не непосредственно по значениям координат x , а по их отклонениям от значений x_0 , определяемым алгоритмом функционирования, т. е. $e = x_0 - x$ (рис. 1.4, б).

Часто оказывается целесообразным вырабатывать управляющее воздействие в функции не только ошибки e , но также ее производных и интегралов по времени:

$$u = f\left(e, \frac{de}{dt}, \dots, \int_0^t e dt, \dots\right), \quad e = x_0 - x. \quad (1.3)$$

Принцип обратной связи широко распространен не только в технике, но и в процессах управления, осуществляемых в живых организмах (системы регуляции различных функций – температуры, ритма кровообращения и др.). В управлении общественными организациями этот принцип реализуется в виде проверки исполнения принятых решений и распоряжений, играющих роль управляющих воздействий.

В ряде случаев эффективно применение комбинированного регулирования по возмущению и отклонению (см. рис. 1.4, в). Комбинированные регуляторы объединяют достоинства обоих принципов – быстроту реакции на изменение возмущений и точное регулирование независимо от того, какая причина вызвала отклонение.

1.3. Основные виды автоматического управления

На первом этапе развития техники управления использовался практически лишь один вид автоматического управления – поддержание заданного постоянного значения регулируемой величины. Долгое время под системами автоматического регулирования понимался именно этот вид. Впоследствии число видов увеличивалось, и вполне вероятно, что упоминаемые ниже шесть основных их видов не исчерпывают не только возможные виды в будущем, но и существующие сегодня.

Стабилизация. Системы поддержания постоянства управляемой величины называют также *системами стабилизации*. Системы стабилизации могут строиться по схемам на рис. 1.2-1.4, в которых желаемый закон регулирования имеет вид $x_0(t) = \text{const}$. В установках, где не требуется высокой точности стабилизации, для этой цели могут использоваться разомкнутые системы (рис. 1.2). Однако в большинстве случаев используются замкнутые системы (рис. 1.4).

Программное управление. При программном управлении алгоритм функционирования задан и можно построить специальное устройство – датчик программы, – вырабатывающее закон регулирования $x_0(t)$. Таким образом, все схемы, показанные на рис. 1.2-1.4, в которых $x_0(t)$ есть заданная функция, а звенья I представляют собой датчики программы, вырабатывающие эту функцию, относятся к классу систем программного управления. Программное управление можно осуществить по любому из фундаментальных принципов или с помощью их комбинации.

В практике используют два вида систем программного управления: системы с временной программой и системы с пространственной программой. В системах первого вида датчик программы вырабатывает непосредственно функцию $x_0(t)$. Примерами могут служить устройства, в которых движение часового механизма или двигателя с равномерным ходом преобразуется с помощью функциональных преобразователей (профилированных кулачков, реостатов и т. п.) в движение $x_0(t)$. К таким устройствам относят устройства программы для изменения температуры закалочных печей, заводные игрушки, магнитофоны, проигрыватели и т. д. Системы второго вида используют в про-

граммном управлении металлообрабатывающими станками. В них движение исполнительного органа (инструмента) осуществляется по заданной в пространстве траектории, закон же движения по траектории во времени малосуществен и в широких пределах может быть произвольным.

Используются два способа пространственного программного управления. Первый состоит в том, что движение по каждой из координатных пространственных осей выполняется отдельным приводом, движение по одной из осей задается произвольно (обычно равномерным), а остальные движения увязываются с первым так, чтобы инструмент двигался по заданной траектории. Второй способ состоит в том, что заданная траектория описывается с помощью системы параметрических уравнений, в которых параметром является время, а затем строится решающее устройство, задающее движение приводам по отдельным осям в соответствии с этими параметрическими уравнениями.

Следящие системы. В следящих системах закон регулирования $x_0(t)$ заранее не известен. Обычно регулируемая величина в таких системах должна воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, следить за ним. Так, автоматически управляемое зенитное орудие должно поворачиваться, следя за полетом цели. Следящая система может быть выполнена в соответствии с любым фундаментальным принципом управления и будет отличаться от соответствующей системы программного управления тем, что вместо датчика программы в ней будет помещено устройство слежения за изменениями внешнего фактора.

Системы с поиском экстремума показателя качества. В ряде процессов показатель качества или эффективности процесса может быть выражен в каждый момент времени функцией текущих координат системы, и управление можно считать оптимальным, если оно обеспечивает поддержание этого показателя в точке максимума, например настройку радиоприемника на частоту передающей станции по наибольшей громкости приема или по наибольшей яркости свечения индикаторной лампы. Такое управление обладает одной нежелательной особенностью: когда точка настройки под воздействием различных возмущений окажется смещенной от экстремума, неизвестно, в каком направлении следует воздействовать на регулирующий

орган, чтобы вернуть ее к экстремуму. Поэтому экстремальное управление начинают с поиска: сначала выполняют небольшие пробные движения в каком-то выбранном направлении, затем анализируют реакцию системы на эти пробы и после этого по результатам анализа вырабатывают управляющее воздействие в виде импульса, приближающего систему к экстремуму.

Первые упоминания в литературе об экстремальных регуляторах содержатся, по-видимому, в статье М. Леблана (1922), где описан регулятор для колебательного контура электропоезда, и в 1926 г. в книге Т. Штейна, где высказывалась идея регулирования топки парового котла по минимуму потерь в дымовой трубе. Далее предложения экстремальных регуляторов давались и исследовались Ю. С. Хлебцевичем (1940) и В. В. Казакевичем (1943). Широкую же известность в мировой литературе принцип экстремального регулирования приобретает в 50-х годах после выхода в свет статей Дрейпера, Ли и других и книги Цян Сюэся (1954) [1].

На рис. 1.5 приведена функциональная схема экстремального регулирования с поиском [1]. Измерительно-преобразующий элемент *ИПЭ*, измеряющий координаты процесса и вычисляющий показатель качества $J = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, подключен к выходу объекта *О*. Устройство пробных воздействий *УПВ* генерирует пробные воздействия v_1, v_2, \dots, v_n на систему регулирующих органов *РО*. Логическое устройство *ЛУ*, получая информацию, как о введенных пробных воздействиях, так и об измене-

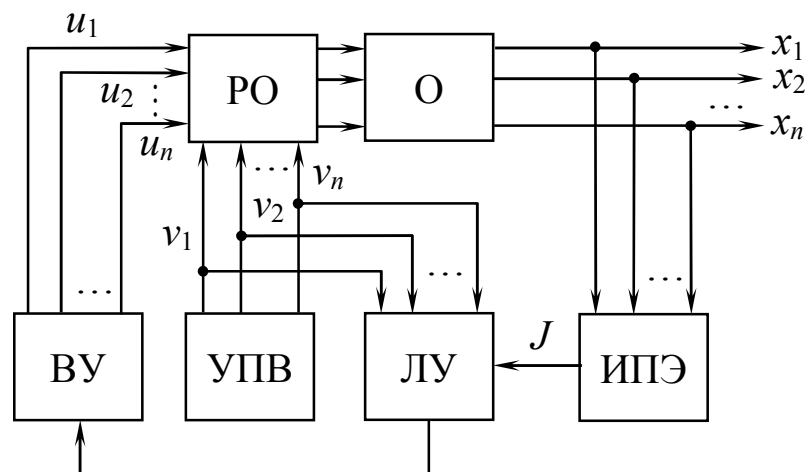


Рис. 1.5. Схема экстремального регулирования с поиском: *О* – объект; *РО* – регулирующие органы; *ВУ* – вычислительное устройство; *УПВ* – устройство пробных воздействий; *ЛУ* – логическое устройство; *ИПЭ* – измерительно-преобразовательный элемент

нии J под их влиянием, анализирует полученные данные и результат сообщает вычислительному устройству BV , которое вырабатывает управляющие воздействия u_1, u_2, \dots, u_n .

Для поиска экстремума необходим чувствительный элемент, обнаруживающий экстремум. Один из способов обнаружения экстремума функции одной переменной $y = f(x)$ состоит в измерении производной dy/dx_i . Необходимые и достаточные условия экстремума выражены соотношениями:

$$dy/dx = 0; \quad d^2y/dx^2 < 0 \quad \text{для максимума};$$

$$dy/dx = 0; \quad d^2y/dx^2 > 0 \quad \text{для минимума}.$$

Для измерения dy/dx используют или измерения в достаточно близких смежных точках разностей $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = y_2 - y_1$ и вычисления их отношения $\Delta y/\Delta x \approx dy/dx$ или же другие методы, например известный из радиотехники метод синхронного детектирования. Вместо трудно реализуемого технического измерения второй производной чаще всего делают проверку знака величины Δy в окрестности предполагаемого экстремума: Δy должно быть положительным в окрестности минимума и отрицательным в окрестности максимума. Однако одиночной проверкой можно пользоваться лишь в том случае, если известно, что экстремум существует, что он единственный и что в рабочей области нет точек перегиба функции. Если одно из этих условий не выполняется, поиск усложняется. Так, если отсутствие точек перегиба не гарантировано, то в случае функции одной переменной надо проверить значения Δy по обе стороны предполагаемого экстремума. В случае функции многих переменных используют вычислительные устройства поиска, основывающиеся на математических итерационных методах решения экстремальных задач: Гаусса-Зайделя, градиента, наискорейшего спуска и т. п.

Прямой метод измерения dy/dx часто трудно реализуем, поэтому используют и другие методы обнаружения экстремума: релейные и шаговые схемы с логическими элементами для анализа знаков, способы «запоминания экстремума», точнее – наибольшего (или наименьшего) из ряда наблюдений в процессе поиска значений, и с ним сравниваются последующие.

Если в рабочей области системы существует несколько локальных экстремумов, то упомянутые методы позволяют обнаружить лишь один из локальных экстремумов, – именно тот, в

окрестности которого оказалась исходная точка поиска. Для нахождения глобального экстремума, если априорной информации об его окрестности нет, приходится просматривать всю рабочую область, выявляя все локальные экстремумы и сравнивая их между собой. Поскольку в системах экстремального управления измеряется значение управляемой величины, они относятся к классу систем управления по замкнутому контуру.

Оптимальное управление. Оптимальное управление в последние годы начали применять как в технических системах для повышения эффективности производственных процессов, так и в системах организационного управления для совершенствования деятельности предприятий, организаций, отраслей народного хозяйства.

В организационных системах обычно интересуются конечным, установившимся результатом команды, не исследуя эффективность во время переходного процесса между отдачей команды и получением окончательного результата. Объясняется это тем, что обычно в таких системах потери в переходном процессе достаточно малы и влияют несущественно на общую величину выигрыша в установившемся режиме, поскольку сам установившийся режим значительно более длителен, чем переходный процесс. Но иногда динамика не исследуется из-за математических трудностей. Методам оптимизации конечных состояний в организационных и экономических системах посвящены курсы методов оптимизации и исследования операций.

В управлении динамическими техническими системами оптимизация часто существенна именно для переходных процессов, в которых показатель эффективности зависит не только от текущих значений координат (как в экстремальном управлении), но и от характера изменения в прошлом, настоящем и будущем, и выражается некоторым функционалом от координат, их производных и, может быть, времени.

Нахождение оптимального управления в подобных динамических задачах требует решения в процессе управления достаточно сложной математической задачи методами вариационного исчисления или математического программирования в зависимости от вида математического описания (математической модели) системы. Таким образом, органической составной частью

системы оптимального управления становится вычислительное устройство. Принцип поясняется на рис. 1.6. На вход вычислительного устройства (машины) 2 поступает информация о текущих значениях координат x с выхода объекта 1, об управлениях u с его входа, о внешних воздействиях z на объект, а также задание извне различных условий: значение критерия оптимальности J , граничных условий $x(0)$, $x(\infty)$, информация о допустимых значениях $x \in X$ и $u \in U$ и т. п. Вычислительное устройство по заложенной в него программе вычисляет оптимальное управление u . Оптимальные системы могут быть как разомкнутыми, так и замкнутыми.

Адаптивные системы. В реальных условиях внешние возмущения иногда приводят к изменению не только координат, но и параметров системы (коэффициентов уравнений), причем в таких системах, как баллистические ракеты, изменения параметров существенны. Изменения параметров, вышедшие за определенные границы, приводят не только к количественным ошибкам или к ухудшению других показателей качества системы, но зачастую и к полной потере ее работоспособности. Эти потери качества часто невозможно устранить, находясь в рамках первоначально принятого фундаментального принципа управления, это можно сделать лишь путем изменения параметров (а иногда и структуры) системы так, чтобы приблизить математическое описание претерпевшей изменения системы к ее исходной модели настолько, чтобы сохранить работоспособность первоначально принятого фундаментального принципа управления.

Системы, автоматически изменяющие значения своих параметров или структур при непредвиденных изменениях внешних условий на основании анализа состояния или поведения системы так, чтобы сохранялось заданное качество ее работы, называют **адаптивными системами** (от лат. *adaptio* – приспособление). Термин заимствован из биологии, где адаптацией называют приспособление организма к изменяющейся среде с целью сохране-

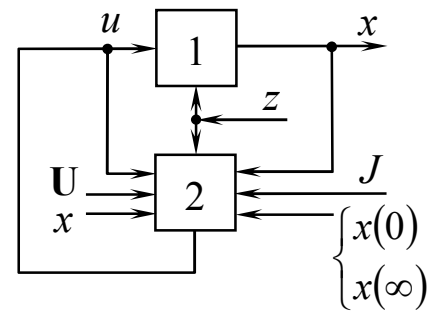


Рис. 1.6. Структурная схема оптимального управления:
1 – объект управления,
2 – вычислительная машина

ния жизнедеятельности. Но в теории управления (так как любая автоматическая система в каком-то смысле приспособливается к изменениям среды) понятие адаптации умышленно сужено: к ней относят лишь такие виды приспособления, которые осуществляются путем изменения управляющим устройством параметров или структуры системы по данным анализа ее работы.

Адаптивные системы с изменением значений параметров иногда называют *самонастраивающимися*, а системы с изменением структуры и алгоритма управления – *самоорганизующимися*.

Обычно адаптивная система содержит в качестве «ядра» схему, реализующую один из фундаментальных принципов управления, а *контур адаптации* пристраивают к ней как вторичный, осуществляющий коррекцию параметров. Контур адаптации, обычно состоящий из устройства измерения *ИУ*, вычисления *ВУ* и управления *УУ*, может быть разомкнут (рис. 1.7), если на его вход подается только входное воздействие, или замкнут (рис. 1.7), если он реагирует также и на выход системы. Контур самонастройки воздействует на блок настройки параметров *БНП*, который может быть включен не только последовательно, как показано на рисунке, но и любым другим способом, например в цепь обратной связи.

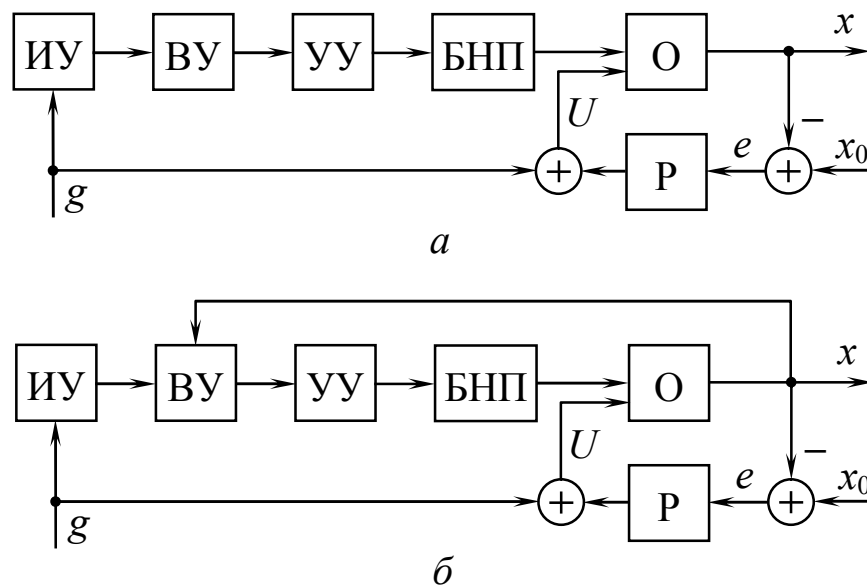


Рис. 1.7. Схемы адаптивных систем: с разомкнутым (а) и замкнутым (б) контурами адаптации

Вычисление воздействий для коррекции параметров – весьма сложная математическая задача, поэтому в составе контура адаптации используют различные моделирующие, счетно-решающие устройства и даже вычислительные машины. Способы адаптации и соответствующие им схемы различаются главным образом алгоритмами и реализующими их программами ЭВМ.

1.4. Классификация систем автоматического управления

Поскольку читатель, внимательно ознакомившийся с предыдущими параграфами книги, уже имеет представление о системах автоматического управления, сейчас самое подходящее время для того чтобы дать их классификацию. Этот вопрос не такой простой, каким может показаться, поскольку для этих систем существует множество классификационных признаков [1-6]. По этой причине дадим лишь краткую классификацию, которая затем может дополняться и уточняться.

1. По основным видам уравнений динамики САУ делятся на *линейные системы*, для которых справедлив принцип суперпозиции и *нелинейные системы*, для которых принцип суперпозиции не выполняется.

2. По типу преобразуемых и передаваемых сигналов САУ делятся на:

а) *непрерывные* (аналоговые), в которых время и уровни всех сигналов представляют собой непрерывно изменяющиеся величины;

б) *импульсные*, в которых информация кодируется каким-либо параметром (высота, длительность, фаза) импульсов определенной формы;

в) *цифровые*, в которых, как и в импульсных, происходит дискретизация (квантование по времени) и, кроме того, квантование уровня сигналов;

г) *системы управления на несущей переменного тока*, в которых информация кодируется амплитудой переменного тока (или напряжения), т. е. огибающей несущего сигнала.

3. По характеру процессов управления различают:

- а) *детерминированные системы* (с определенными параметрами и процессами);
- б) *стохастические системы* (со случайными параметрами и процессами).

4. В параграфе 1.3, по существу, была дана классификация САУ по информационному признаку (по характеру функционирования):

- а) *системы стабилизации*;
- б) *системы программного управления*;
- в) *следящие системы*;
- г) *системы с поиском экстремума показателя качества*;
- д) *оптимальные системы*;
- е) *адаптивные системы*.

5. По энергетическому признаку САУ делятся на:

- а) *системы прямого регулирования*, в которых энергия, необходимая для оказания управляющего воздействия, берется от объекта регулирования;
- б) *системы непрямого действия*, в которых энергия, необходимая для оказания управляющего воздействия, берется от дополнительного источника питания.

6. По числу задающих воздействий и регулируемых величин САУ делятся на:

- а) *одномерные*;
- б) *многомерные*.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 1

1. Что такое управление и система автоматического управления?
2. Как можно в наиболее простом виде изобразить управляемый объект?
3. В чем заключается принцип разомкнутого управления?
4. В чем заключается принцип управления по возмущению?
5. В чем заключается принцип регулирования по отклонению?
6. Что такое система стабилизации и система программного управления?
7. Что такое следящая система?
8. Что такое система с поиском экстремума показателя качества?
9. Что такое оптимальное управление?
10. Что такое адаптивная система?
11. Какова классификация систем автоматического управления?

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Материал данной главы будет иметь большое значение при изучении последующих глав и к нему студент постоянно должен будет обращаться в дальнейшем. Вместе с тем значительная часть этого материала уже знакома студентам электротехнических и радиотехнических специальностей. Например, преобразование Лапласа изучается в высшей математике и используется в теории электрических цепей для расчета переходных процессов. При изучении электронных усилителей уже использовались понятия о частотных характеристиках, рассматривались основные соотношения для усилителей с обратными связями и т. д.

2.1. Уравнения динамики и статики. Линеаризация

На определенном этапе разработки и исследования системы автоматического управления получают ее математическое описание – описание процессов, протекающих в системе, на языке математики. Математическое описание может быть аналитическим (с помощью уравнений), графическим (с помощью графиков, структурных схем и графов) и табличным (с помощью таблиц).

Для получения математического описания системы обычно составляют описание ее отдельных элементов. В частности, для получения уравнений системы составляют уравнения для каждого входящего в нее элемента. Совокупность всех уравнений элементов и дает уравнения системы.

Уравнения (а также структурные схемы) автоматической системы управления называют ее *математической моделью*. Такое название обусловлено тем, что при математическом описании (составлении уравнений) физических процессов всегда делают какие-либо допущения и приближения. Математическая модель одной и той же системы в зависимости от цели исследования может быть разной. Более того, иногда полезно при решении одной и той же задачи на разных этапах принимать разную математическую модель: начать исследование с простейшей мо-

дели, а затем ее постепенно усложнять, с тем, чтобы учесть дополнительные явления и связи, которые на начальном этапе были отброшены как несущественные. Сказанное обуславливается тем, что к математической модели предъявляются противоречивые требования: она должна, с одной стороны, как можно полнее отражать свойства оригинала, а с другой стороны, быть по возможности простой, чтобы не усложнять исследование.

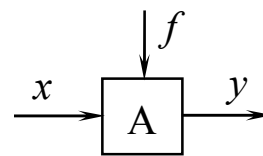


Рис. 2.1. Упрощенное изображение звена системы автоматического управления: А – оператор звена

Рассмотрим математическое описание непрерывных систем управления с помощью дифференциальных уравнений. В большинстве случаев звенья и системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного порядка. Здесь под звеном понимается математическая модель элемента. Для примера рассмотрим звено (рис. 2.1), которое можно описать дифференциальным уравнением второго порядка

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, x, \dot{x}) + f = 0, \quad (2.1)$$

где y – выходная величина; x и f – входные величины; \dot{y} и \dot{x} – первые производные по времени; \ddot{y} – вторая производная по времени.

Уравнение (2.1), описывающее процессы в звене при произвольных входных воздействиях, называют **уравнением динамики**. Пусть при постоянных входных величинах $x = x^0$ и $f = f^0$ процесс в звене с течением времени установится: выходная величина примет постоянное значение $y = y^0$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$F(y^0, 0, 0, x^0, 0) + f^0 = 0. \quad (2.2)$$

Это уравнение описывает статический или установившийся режим и его называют **уравнением статики**.

Статический режим можно описать графически с помощью статических характеристик. **Статической характеристикой** звена или элемента (а также системы) называют зависимость выходной величины от входной в статическом режиме. Статическую характеристику можно построить экспериментально,

подавая на вход элемента постоянное воздействие и измеряя выходную величину после окончания переходного процесса, или расчетным путем, используя уравнение статики.

Если звено имеет несколько входов, то оно описывается с помощью семейства или семейств статических характеристик. Например, звено, характеризующееся в статическом режиме уравнением (2.2), можно описать графически с помощью семейства статических характеристик, представляющих собой кривые зависимости выходной величины y от одной входной величины x (или f) при различных фиксированных значениях другой – f (или x).

Линеаризация. Обычно автоматические системы описывают нелинейными дифференциальными уравнениями. Но во многих случаях можно их линеаризовать, т. е. заменить исходные нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системе. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называют *линеаризацией*.

В автоматических системах должен поддерживаться некоторый заданный режим. При этом режиме входные и выходные величины звеньев системы изменяются по определенному закону. В частности, в системах стабилизации они принимают определенные постоянные значения. Но из-за различных возмущающих факторов фактический режим отличается от требуемого (заданного), поэтому текущие значения входных и выходных величин не равны значениям, соответствующим заданному режиму. В нормально функционирующей автоматической системе фактический режим немного отличается от требуемого режима и отклонения входных и выходных величин входящих в нее звеньев от требуемых значений малы. Это позволяет произвести линеаризацию, разлагая нелинейные функции, входящие в уравнения, в ряд Тейлора. Линеаризацию можно производить по звеньям.

В качестве примера выполним линеаризацию звена, описываемого уравнением (2.1). Допустим, что установившиеся значения переменных x, f, y является постоянными x^0, f^0, y^0 и представим переменные x, f, y в виде

$$x = x^0 + \Delta x(t),$$

$$\begin{aligned} f &= f^0 + \Delta f(t), \\ y &= y^0 + \Delta y(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Delta x(t)$, $\Delta f(t)$, $\Delta y(t)$ – отклонения переменных x , f , y от значений x^0 , f^0 , y^0 в процессе регулирования.

Разложив функцию в уравнении (2.1) в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \Delta \ddot{y} + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^0 \Delta \dot{x} + f^0 + \Delta f + \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где величины с верхним индексом 0 обозначают значения, получающиеся при подстановке $(y^0, 0, 0, x^0, 0)$, т. е.

$$F^0 = F(y^0, 0, 0, x^0, 0), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 = \frac{\partial F}{\partial y}(y^0, 0, 0, x^0, 0),$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0 = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(y^0, 0, 0, x^0, 0)$$

и т. д.

Вычитая из уравнения (2.4) уравнение (2.2) и отбрасывая в (2.4) все последующие члены разложения, как малые высшего порядка, приходим к линейному уравнению динамики звена

$$a_0 \frac{d^2(\Delta y)}{dt^2} + a_1 \frac{d(\Delta y)}{dt} + a_2 \Delta y - b_0 \frac{d(\Delta x)}{dt} - b_1 \Delta x - c_0 \Delta f = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0, \quad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0, \quad a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0, \\ b_0 &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^0, \quad b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0, \quad c_0 = -1. \end{aligned}$$

Звенья и системы, которые описываются линейными уравнениями, называют соответственно *линейными звеньями* и *линейными системами*.

Уравнение (2.5) было получено при следующих предположениях: 1) отклонения выходной Δy и входной Δx величин дос-

таточно малы; 2) функция F обладает непрерывными частными производными по всем своим аргументам в окрестности точек, соответствующих заданному режиму. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то линеаризацию производить нельзя. По поводу первого условия необходимо отметить следующее: нельзя раз и навсегда установить, какие отклонения считать малыми. Это зависит от вида нелинейности.

Часто нелинейную зависимость между отдельными переменными, входящими в уравнение звена, задают в виде кривой. В этих случаях линеаризацию можно произвести графически.

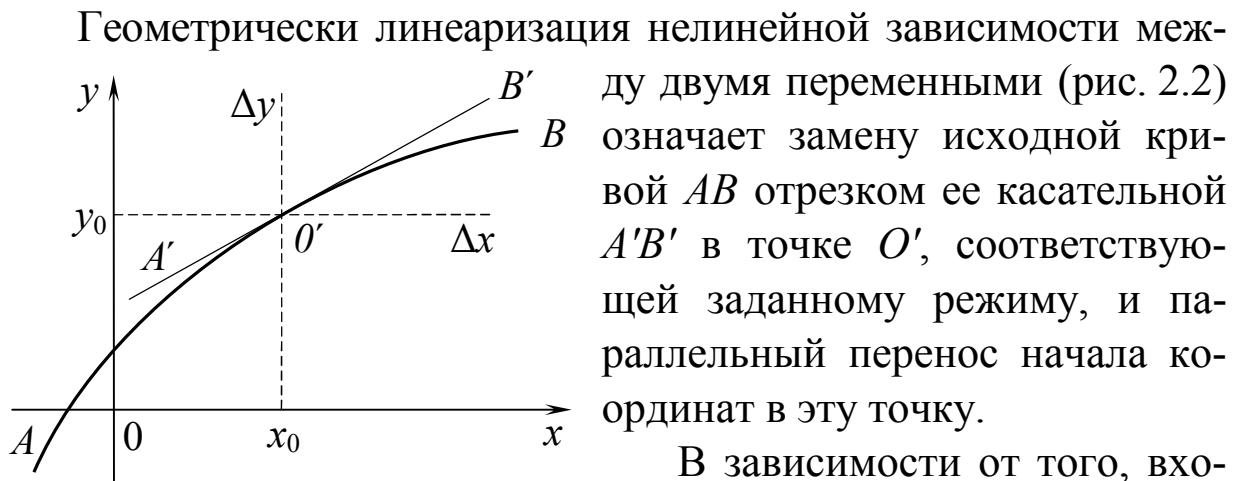


Рис. 2.2. Графическая линеаризация нелинейного звена

В зависимости от того, входит или нет время явно в уравнение, системы разделяют на стационарные и нестационарные.

Автоматические системы управления (звенья) называют **стационарными**, если они при постоянных внешних воздействиях описываются уравнениями, не зависящими явно от времени. Это означает, что свойства системы со временем не изменяются. В противном случае система называется **нестационарной**. Для линейных систем можно дать также следующее определение: **стационарными линейными системами** (звеньями) называют системы (звенья), которые описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами; **нестационарными линейными системами** (звеньями) или **системами с переменными параметрами** — системы (звенья), которые описываются линейными уравнениями с переменными коэффициентами.

2.2. Основные свойства преобразования Лапласа

В этом параграфе даны основные сведения о преобразовании Лапласа, которые будут использованы при рассмотрении систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

Преобразованием Лапласа называют соотношение

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

ставящее функции $x(t)$ вещественного переменного в соответствие функцию $X(s)$ комплексного переменного s ($s = \sigma + j\omega$). При этом $x(t)$ называют **оригиналом**, а $X(s)$ – **изображением** или **изображением по Лапласу**. То, что $x(t)$ имеет своим изображением $X(s)$ или оригиналом $X(s)$ является $x(t)$, записывается так:

$$x(t) \doteq X(s) \text{ или } X(s) \doteq x(t).$$

Иногда также пользуются символической записью

$$X(s) = L\{x(t)\},$$

где L – оператор Лапласа.

Предполагается, что функция $x(t)$, которая подвергается преобразованию Лапласа, обладает следующими свойствами: $x(t)$ определена и кусочно-дифференцируема на всей положительной числовой полуоси $[0, \infty]$; $x(t) = 0$ при $t < 0$; существуют такие положительные числа M и c , что $|x(t)| \leq Me^{ct}$ при $0 \leq t < \infty$. Функции, обладающие указанными тремя свойствами, часто называют **функциями-оригиналами**.

Соотношение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds,$$

определяющее по известному изображению его оригинал (в точках непрерывности последнего), называют **обратным преобразованием Лапласа**. В нем интеграл берется вдоль любой прямой $\text{Re } s = \sigma_0 > c$. Символически обратное преобразование Лапласа можно записать так:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\},$$

где символ L^{-1} – обратный оператор Лапласа.

Остановимся на основных свойствах преобразования Лапласа.

1. *Свойство линейности.* Для любых постоянных α и β

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}.$$

2. *Дифференцирование оригинала.* Если производная $\dot{x}(t)$ является функцией-оригиналом, т. е. обладает указанными выше тремя свойствами, то $L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$, где $X(s) = L\{x(t)\}$, $x(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t)$. Если n -я производная функции

$x(t)$ является функцией-оригиналом, то

$$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - x^{(n-1)}(0),$$

где $x^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Если начальные условия нулевые, т. е. $x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то последняя формула принимает вид $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$. Таким образом, при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на s .

3. *Интегрирование оригинала.* Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на s :

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{X(s)}{s}.$$

4. *Теорема запаздывания.* Для любого положительного числа τ

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{x(t)\} = e^{-s\tau} X(s).$$

5. *Теорема о свертке* (теорема умножения изображений). Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – оригиналы, а $X_1(s)$ и $X_2(s)$ – их изображения, то

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau.$$

Интеграл правой части равенства называют *сверткой функций* $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и обозначают $x_1(t) * x_2(t)$:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau.$$

6. *Теоремы о предельных значениях.* Если $x(t)$ – оригинал, а $X(s)$ – его изображение, то $x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ и при существовании

$$\text{предела } x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

7. *Теорема разложения.* Если функция $X(s) = A(s)/B(s)$ дробно-рациональна, причем степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то ее оригиналом является умноженная на 1 (t) функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k - 1}}{ds^{n_k - 1}} \left[X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st} \right],$$

где s_k – корни уравнения $B(s) = 0$, а n_k – их кратности и l – число различных корней. Если все корни уравнения простые, то эта формула разложения принимает вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t},$$

где n – степень полинома $B(s)$,

$$B'(s_k) = \left. \frac{dB}{ds} \right|_{s=s_k}.$$

Пример 2.1. Пусть изображение

$$X(s) = 4(s+1)/[s(s+2)^2].$$

Согласно принятому обозначению,

$$A(s) = 4(s+1); \quad B(s) = s(s+2)^2; \quad B'(s) = 3s^2 + 8s + 4.$$

Функция $X(s)$ имеет полюсы [корни уравнения $B(s) = 0$] $s_1 = 0$, $s_2 = -2$. Полюс s_1 является простым, а полюс s_2 – кратным, имея кратность $n_2 = 2$. Простому полюсу s_1 соответствует слагаемое

$$\frac{A(s_1)}{B'(s_1)} e^{s_1 t} = \frac{4}{4} e^0 = 1,$$

кратному полюсу s_2 – слагаемое

$$\frac{1}{(n_2 - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{d^{n_2 - 1}}{ds^{n_2 - 1}} \left[X(s)(s - s_2)^{n_2} e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[\frac{4(s+1)}{s} e^{st} \right] = (2t - 1)e^{-2t}.$$

Поэтому $x(t) = 1 + (2t - 1)e^{-2t}$.

2.3. Формы записи линейных дифференциальных уравнений. Передаточные функции [1]

При описании систем автоматического управления широко используют символическую форму записи линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее на примере уравнения (2.5). Перепишем его, опустив для сокращения записи знак Δ и оставив в левой части только члены, содержащие выходную переменную и ее производные:

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\dot{x} + b_1x + c_0f. \quad (2.6)$$

Введем для операции дифференцирования обозначение p , т. е.

$$d/dt \equiv p; \quad d^i/dt^i \equiv p^i.$$

Используя его, уравнение (2.6) можно записать в виде

$$a_0p^2y + a_1py + a_2y = b_0px + b_1x + c_0f. \quad (2.7)$$

При записи и преобразовании дифференциальных уравнений оператор (операцию дифференцирования) p можно рассматривать как алгебраический множитель, а выражение py – как произведение, не обладающее свойством коммутативности: нельзя вместо py писать yp . Учитывая это замечание, перепишем (2.7), вынеся y и x за скобки:

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)y = (b_0p + b_1)x + c_0f. \quad (2.8)$$

Введем обозначения $Q(p) = a_0p^2 + a_1p + a_2$, $R_1(p) = b_0p + b_1$, $R_2(p) = c_0$.

С помощью этих обозначений уравнение (2.8) можно записать в более компактной форме:

$$Q(p)y = R_1(p)x + R_2(p)f. \quad (2.9)$$

В уравнении (2.9) $Q(p)$ (дифференциальный оператор при выходной величине) называют *собственным оператором*, а $R_1(p)$ и $R_2(p)$ (дифференциальные операторы при входных величинах) – *операторами воздействия*.

Передаточные функции. Отношение оператора воздействия к собственному оператору называют *передаточной функцией* или *передаточной функцией в операторной форме*.

Звено, описываемое уравнением (2.6) или, что то же самое, уравнениями (2.7)-(2.9), можно характеризовать двумя переда-

точными функциями: передаточной функцией $W_1(p)$ по входной величине x , т. е.

$$W_1(p) = R_1(p)/Q(p) = (b_0p + b_1)/(a_0p^2 + a_1p + a_2), \quad (2.10)$$

и передаточной функцией $W_2(p)$ по входной величине f , т. е.

$$W_2(p) = R_2(p)/Q(p) = c_0/(a_0p^2 + a_1p + a_2). \quad (2.11)$$

Используя передаточные функции, уравнение (2.6) записывают в виде

$$y = W_1(p)x + W_2(p)f. \quad (2.12)$$

Это уравнение представляет собой условную, более компактную форму записи исходного уравнения (2.6). Уравнения (2.8), (2.9) и (2.12) называют уравнениями в *символической* или *операторной* форме записи.

Наряду с передаточной функцией в операторной форме широко используют передаточную функцию в форме изображений Лапласа.

Передаточной функцией или **передаточной функцией в форме изображений Лапласа** называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях. Если звено (система) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной величины остальные величины полагают равными нулю.

Пример 2.2. Найдем передаточные функции в форме изображений Лапласа для звена, описываемого уравнением (2.6).

Перейдем в обеих частях этого уравнения к изображениям Лапласа:

$$L\{a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y\} = L\{b_0\dot{x} + b_1x + c_0f\}.$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала (1-е и 2-е свойства преобразования Лапласа), при нулевых начальных условиях получим

$$(a_0s^2 + a_1s + a_2)Y(s) = (b_0s + b_1)X(s) + c_0F(s), \quad (2.13)$$

где $Y(s) = L\{y(t)\}$; $X(s) = L\{x(t)\}$; $F(s) = L\{f(t)\}$.

Полагая последовательно $F(s) = 0$ и $X(s) = 0$ и определяя каждый раз отношение выходной величины к входной, получим

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s + b_1}{a_0s^2 + a_1s + a_2}; \\ W_2(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{c_0}{a_0s^2 + a_1s + a_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Сравнивая выражения (2.10), (2.11) и (2.14), нетрудно заметить, что передаточные функции в форме изображений Лапласа и в операторной форме с точностью до обозначений p и s совпадают.

Передаточную функцию в форме изображения Лапласа можно получить из передаточной функции в операторной форме, если в последней сделать подстановку $p = s$. В общем случае это следует из того, что дифференцированию оригинала – символическому умножению оригинала на p – при нулевых начальных условиях соответствует умножение изображения на комплексное число s .

Сходство между передаточными функциями в форме изображения Лапласа и в операторной форме чисто внешнее. Оно имеет место только в случае стационарных звеньев (систем).

Если звено является нестационарным, т. е. коэффициенты в (2.6) зависят от времени, формулы (2.14) неверны.

Используя передаточные функции (2.14), уравнение (2.13) в изображениях Лапласа можно записать

$$Y(s) = W_1(s)X(s) + W_2(s)F(s). \quad (2.15)$$

Это уравнение, как и уравнение (2.13), адекватно исходному дифференциальному уравнению (2.6) только при нулевых начальных условиях. Если начальные условия не равны нулю, то уравнениями (2.13) и (2.15) как математическими описаниями исходного звена пользоваться нельзя.

Передаточные функции системы наряду с дифференциальными уравнениями широко используются для описания систем автоматического управления (САУ). Но при ненулевых начальных условиях они не всегда являются их исчерпывающими характеристиками. Если собственный оператор и оператор воздействия системы имеют общие множители (нули), то они при вычислении передаточной функции сокращаются. И в этом случае по передаточной функции системы нельзя восстановить ее дифференциальное уравнение и получить описание процессов в ней при произвольных начальных условиях.

Стандартная форма записи линейных дифференциальных уравнений. Обычно линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами не выше второго порядка

записывают в стандартной форме. При этом члены, содержащие выходную величину и ее производные, записывают в левой части уравнения, а все остальные члены – в правой; коэффициент при выходной величине делают равным единице. Если в правой части содержатся производные, то члены, содержащие какую-либо одну входную величину и ее производные, объединяют в одну группу и коэффициент при соответствующей входной величине выносят за скобки.

Уравнение (2.6) в стандартной форме принимает вид

$$T_1^2 \ddot{y} + T_2 \dot{y} + y = k_1 (\tau_1 \dot{x} + x) + k_2 f. \quad (2.16)$$

где $T_1^2 = a_0 / a_2$; $T_2 = a_1 / a_2$; $k_1 = b_1 / a_2$; $\tau_1 = b_0 / b_1$; $k_2 = c_0 / a_2$.

В уравнении (2.16) постоянные T_1 , T_2 и τ_2 имеют размерность времени и их называют **постоянными времени**, а коэффициенты k_1 и k_2 – **передаточными коэффициентами**. Если исходное уравнение (2.6) не содержит $y(a_2=0)$, то в стандартной форме коэффициент при производной y должен быть равен единице: обе части уравнения делят на коэффициент a_1 .

В символической форме уравнение (2.16) принимает вид

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)y = k_1 (\tau_1 p + 1)x + k_2 f. \quad (2.17)$$

Напомним, что это уравнение представляет собой условную запись уравнения (2.16).

2.4. Частотные характеристики

Если передаточная функция звена (или системы) есть

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (2.18)$$

то функцию $W(j\omega)$, получаемую из передаточной функции (2.18) при подстановке в нее $p = j\omega$,

$$W(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.19)$$

называют **частотной передаточной функцией**. Частотная передаточная функция является комплекснозначной функцией от действительной переменной ω .

Функцию $W(j\omega)$ можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.20)$$

где

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (2.21)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega).$$

Если $|\arg W(j\omega)| \leq \pi/2$, то

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (2.22)$$

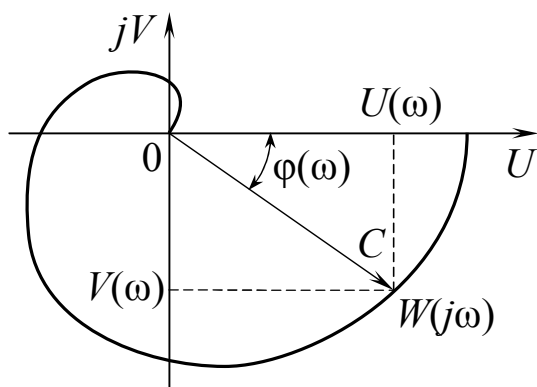


Рис. 2.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

На комплексной плоскости (рис. 2.3) частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяет вектор \overline{OC} , длина которого равна $A(\omega)$, а аргумент (угол, образованный этим вектором с действительной положительной полуосью) – $\varphi(\omega)$. Кривую, которую описывает конец этого вектора при изменении частоты от 0 до ∞ (иногда от $-\infty$ до ∞), называют **амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)**.

График функции $U(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega)$ называется **вещественной частотной характеристикой**, а график функции $V(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega)$ – **мнимой частотной характеристикой**.

График функции $A(\omega) = |W(j\omega)|$ называют **амплитудной частотной характеристикой**.

График функции $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ называют **фазовой частотной характеристикой**.

Кроме перечисленных частотных характеристик используют еще логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) – логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ). Назовем функцию

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$$

логарифмической амплитудной частотной функцией. График зависимости логарифмической амплитудной частотной функции $L(\omega)$ от логарифма частоты ($\lg \omega$) называют **логарифмической**

амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ). При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе: на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, пишут само значение ω , а не значение $\lg \omega$, а по оси ординат – $L(\omega)$. **Логарифмической фазовой частотной характеристикой** (ЛФЧХ) называют график зависимости фазовой частотной функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $\lg \omega$. При его построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, пишут значение ω .

Единицей $L(\omega)$ является децибел, а единицей логарифма частоты в ЛЧХ – декада. **Декадой** называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду.

Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку $\omega = 0$. Частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg \omega \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow 0$.

В общем случае передаточная функция линейного звена с постоянными параметрами (рис. 2.4) имеет вид

$$W(s) = \frac{K_1 N(s)}{L(s)}, \quad (2.23)$$

где $N(s)$ и $L(s)$ – многочлены с коэффициентами 1 при младших членах, т. е.

$$L(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + 1, \quad N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + 1$$

Поскольку согласно рис. 2.4

$$W(s) = \frac{K_1 N(s)}{L(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

где $X(s)$ и $Y(s)$ – изображения по Лапласу переменных x и y , то справедливо уравнение в изображениях

$$L(s)Y(s) = K_1 N(s)X(s).$$

Это уравнение соответствует дифференциальному уравнению

$$L(p)y = K_1 N(p)x, \quad (2.24)$$

где $p = d/dt$.

Рассмотрим, какой физический смысл имеют частотные характеристики и как можно построить их экспериментально.

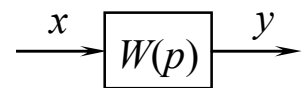


Рис. 2.4. Условное изображение линейного звена (системы)

Найдем математическое описание вынужденного движения системы при подаче на ее вход гармонического воздействия, например

$$x = x_m \cos \omega t. \quad (2.25)$$

Для этого решим уравнение (2.24), подставив в правую часть выражение (2.25). Общее решение имеет вид

$$y(t) = y_c(t) + y_B(t), \quad (2.26)$$

где y_c – общее решение однородного уравнения, а y_B – частное решение неоднородного уравнения.

Составляющая $y_c(t)$ определяет свободные движения (переходный процесс). В устойчивых системах она со временем затухает: $y_c(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Вынужденное движение описывается частным решением $y_B(t)$. Чтобы найти его, представим входное воздействие (2.25) с помощью формулы Эйлера в виде суммы:

$$x = x_m \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = x_1 + x_2,$$

где

$$x_1 = \frac{x_m}{2} e^{j\omega t}, \quad x_2 = \frac{x_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

Используя принцип суперпозиции, решение уравнения (2.17) можно также представить в виде суммы $y = y_1 + y_2$, где y_1 – решение при $x = x_1$, y_2 – решение при $x = x_2$. Найдем отдельно каждое из этих решений. Подставим выражение для x_1 в правую часть уравнения (2.24) вместо x . Так как

$$px_1 = \frac{x_m}{2} pe^{j\omega t} = \frac{x_m}{2} (j\omega) e^{j\omega t} = (j\omega)x_1,$$

$$p^2 x_1 = p(px_1) = p(j\omega x_1) = (j\omega)^2 x_1, \dots,$$

$$p^m x_1 = (j\omega)^m x_1,$$

уравнение (2.24) примет вид

$$L(p)y_1 = K_1 N(j\omega)x_1. \quad (2.27)$$

Частное решение последнего уравнения будем искать в виде

$$y_1 = A_1 x_1 = A_1 \frac{x_m}{2} e^{j\omega t}, \quad (2.28)$$

где A_1 не зависит от времени. При подстановке этого выражения в (2.27) получим

$$L(j\omega)A_1 x_1 = K_1 N(j\omega)x_1,$$

откуда следует

$$A_1 = \frac{K_1 N(j\omega)}{L(j\omega)}.$$

Очевидно, что это выражение совпадает с частотной передаточной функцией

$$W(j\omega) = \frac{K_1 N(j\omega)}{L(j\omega)},$$

рассматриваемого звена.

Подставив это выражение в формулу (2.28), получим

$$y_1 = W(j\omega) \frac{x_m}{2} e^{j\omega t}, \quad (2.29)$$

Теперь найдем частное решение y_2 исходного уравнения (2.24), подставив вместо x выражение для $x_2 = \frac{x_m}{2} e^{-j\omega t}$. Так как

$$p x_2 = \frac{x_m}{2} p e^{-j\omega t} = (-j\omega) \frac{x_m}{2} e^{-j\omega t} = (-j\omega) x_2,$$

$$p^2 x_2 = p(p x_2) = (-j\omega)^2 x_2, \dots, p^m x_2 = (-j\omega)^m x_2,$$

то из (2.24) вместо (2.27) получим

$$L(p)y_2 = K_1 N(-j\omega)x_2.$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$y_2 = A_2 x_2 = A_2 \frac{x_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

Проделав те же выкладки, что и при нахождении частного решения y_1 , получим

$$A_2 = W(-j\omega), \quad y_2 = W(-j\omega) \frac{x_m}{2} e^{-j\omega t}. \quad (2.30)$$

Сложив (2.28) и (2.30) с учетом выражений

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad W(-j\omega) e^{-j\omega t} = \overline{W(j\omega) e^{j\omega t}},$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение, найдем математическое описание вынужденного движения

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = \left[W(j\omega) e^{j\omega t} + W(-j\omega) e^{-j\omega t} \right] \frac{x_m}{2} = \\ &= \left\{ A(\omega) e^{j[\varphi(\omega) + \omega t]} + A(\omega) e^{-j[\varphi(\omega) + \omega t]} \right\} \frac{x_m}{2} = \\ &= A(\omega) x_m \cos[\omega t + \varphi(\omega)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Таким образом, при гармоническом воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса, выходная величина также изменяется по гармоническому закону, но с другими амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю, а сдвиг фазы – аргументу частотной передаточной функции. И, следовательно, амплитудная частотная характеристика показывает изменение отношения амплитуд, а фазовая частотная характеристика – сдвиг фазы выходной величины относительно входной в зависимости от частоты входного гармонического воздействия.

Из приведенной физической интерпретации частотных характеристик ясно, как строить их экспериментальным путем. Для экспериментального построения частотных характеристик имеется специальная аппаратура, в состав которой входят генератор гармонических колебаний с регулируемой частотой и устройства для измерения амплитуды и фазы колебаний.

Частотные характеристики используют для описания как устойчивых, так и неустойчивых систем. Но в последнем случае они не имеют такого ясного физического смысла.

2.5. Временные характеристики

Другими важными характеристиками автоматических систем (звеньев) являются переходные и импульсные переходные функции и их графики – временные характеристики. Их используют при описании линейных систем, как стационарных, так и нестационарных.

Переходной функцией (характеристикой) системы (звена) называют функцию, описывающую изменение выходной величины системы (звена), когда на ее вход подается единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную функцию обычно обозначают $h(t)$. Иначе: переходная функция $h(t)$ есть функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.

Аналитически единичное ступенчатое воздействие можно описать единичной функцией

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

График переходной функции – кривая зависимости функции $h(t)$ от времени t – называют *переходной* или *разгонной характеристикой*.

Импульсной переходной или *весовой функцией* (функцией *веса*) системы (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях; обозначают эту функцию $w(t)$, если передаточная функция обозначена через $W(p)$.

График импульсной переходной функции называют *импульсной переходной характеристикой*.

Переходную и импульсную переходную характеристики называют *временными характеристиками*.

При определении весовой функции было использовано понятие единичного импульса. Физически единичный импульс можно представить как очень узкий импульс единичной площади. Математически он описывается функцией $\delta(t)$, которую называют *дельта-функцией*. Дельта-функция является обобщенной функцией, теория обобщенных функций – сравнительно новый раздел функционального анализа, и здесь она не будет рассматриваться. Отметим только, что в рамках теории обобщенных функций любые встречающиеся в приложении функции обладают производными любого порядка. В частности, существует производная от единичной функции – она равна дельта-функции: $1'(t) = \delta(t)$. Обладает производными любого порядка и дельта-функция.

Перейдем к определению дельта-функции и ее производных. При этом воспользуемся тем обстоятельством, что при решении практических задач, как правило, дельта-функция и ее производные встречаются только на промежуточных этапах. В окончательном результате они или отсутствуют, или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо «обычной» функцией. Поэтому нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое дельта-функция, а достаточно ответить на

вопрос, что означает интеграл от произведения дельта-функции или какой-либо ее производной и обычной функции. Руководствуясь приведенными соображениями, дельта-функцию можно определить так: дельта-функция есть функция, которая обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1; \quad (2.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0). \quad (2.33)$$

Равенство (2.23) известно как фильтрующее свойство дельта-функции и используется очень широко при различных аналитических преобразованиях сигналов.

Производные от дельта-функции можно определить по следующим соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dot{\delta}(t) \varphi(t) dt = -\varphi(0); \quad (2.34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta^{(m)}(t) \varphi(t) dt = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \quad (2.35)$$

где ε – произвольное положительное число; $\varphi(t)$ – обычная функция, обладающая m -й производной; $\delta^{(m)}(t)$ – m -я производная по времени от дельта-функции.

Найдем изображения по Лапласу от дельта-функции и ее производных. При этом преобразование Лапласа будем трактовать как предельное соотношение

$$X(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

Используя соотношения (2.32)-(2.35), нетрудно получить

$$L\{\delta(t)\} = 1, \quad L\{\dot{\delta}(t)\} = s, \quad L\{\delta^{(m)}(t)\} = s^m. \quad (2.36)$$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в общем виде:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x. \quad (2.37)$$

В изображениях по Лапласу это уравнение принимает вид

$$Y(s) = W(s)X(s), \quad (2.38)$$

где $W(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)/(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)$ есть передаточная функция.

Как легко проверить, используя (2.36), уравнение (2.38) справедливо и в тех случаях, когда $x = 1(t)$ или $x = \delta(t)$.

В соответствии с определением весовой функции при $x = \delta(t)$ переменная $y(t) = w(t)$. И так как $L\{\delta(t)\} = 1$, то при этом (2.38) можно записать

$$L\{w(t)\} = W(s). \quad (2.39)$$

Таким образом, передаточная функция равна изображению по Лапласу от весовой функции и соответственно

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (2.40)$$

Последнюю формулу можно использовать для вычисления весовой функции.

Установим связь между весовой и переходной функциями. Так как $L\{1(t)\} = 1/s$, то уравнение (2.38) при $x = 1(t)$ принимает вид

$$L\{h(t)\} = W(s) \frac{1}{s}.$$

Сравнив эту формулу с (2.39), нетрудно заметить, что $sL\{h(t)\} = L\{w(t)\}$. Так как при нулевых начальных условиях умножению изображения на s соответствует дифференцирование оригинала, то из последнего равенства $w(t) = h'(t)$. Весовая и переходная функции, как и передаточная функция, являются исчерпывающими характеристиками системы (звена) при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при произвольном входном воздействии. Действительно, исходя из уравнения (2.38), с помощью теоремы о свертке (свойство 5 преобразования Лапласа) можем записать

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Эта формула, как и уравнение (2.38), справедлива только при нулевых начальных условиях.

2.6. Элементарные звенья и их характеристики

Выше звено было определено как математическая модель элемента. Вообще же **звеном** называют математическую модель элемента, соединения элементов или любой части системы. Звенья, как и системы, могут описываться дифференциальными уравнениями довольно высокого порядка, и в общем случае их передаточные функции могут быть записаны в виде

$$W(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) / (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n). \quad (2.41)$$

Но всегда их можно представить как соединения типовых или элементарных звеньев, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

Из курса алгебры известно, что полином произвольного порядка можно разложить на простые множители – множители вида

$$k_1 s, \quad (d_1 s + d_2), \quad (d_1 s^2 + d_2 s + d_3), \quad (2.42)$$

поэтому передаточную функцию (2.41) можно представить как произведение простых множителей вида (2.42) и простых дробей вида

$$k/s, \quad k/(d_1 s + d_2), \quad k/(d_1 s^2 + d_2 s + d_3). \quad (2.43)$$

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей (2.42) или простых дробей (2.43), называют **типowymi** или **элементарными звеньями**.

Пропорциональное звено. *Пропорциональным* называют звено, которое описывается уравнением $y(t) = Ku(t)$, или, что то же, передаточной функцией $W(s) = K$.

Частотные и временные функции этого типового звена имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = K; \quad U(\omega) = K; \quad V(\omega) = 0; \quad A(\omega) = K; \\ \varphi(\omega) = 0; \quad L(\omega) = 20 \lg K; \quad h(t) = K 1(t); \quad w(t) = \delta(t).$$

На рис. 2.5 представлены некоторые из характеристик пропорционального звена: амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) (рис. 2.5, а) есть точка на действительной оси; фазовая частотная характеристика (и ЛФЧХ) совпадает с положительной полуосью частот; логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) (рис. 2.5, б) параллельна оси

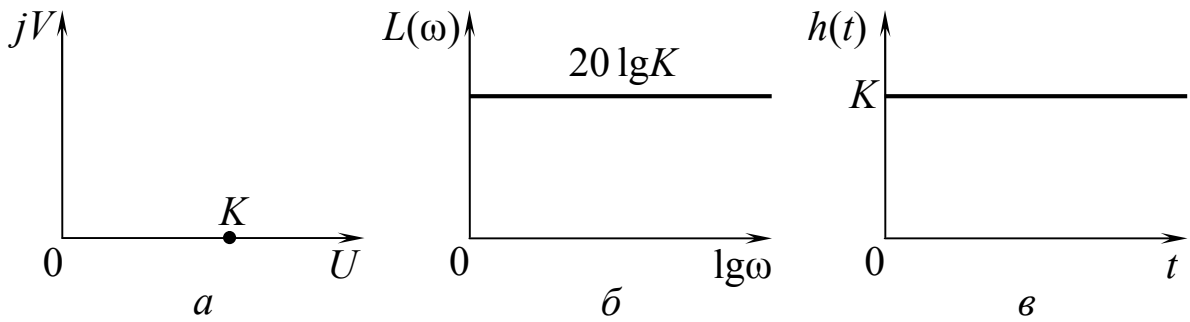


Рис. 2.5. Характеристики пропорционального звена: АФЧХ (а), ЛАЧХ (б), переходная (в)

частот и проходит на уровне $L(\omega) = 20 \lg K$. Переходная характеристика (рис. 2.5, в) параллельна оси времени и проходит на уровне $h = K$.

Интегрирующее звено. *Интегрирующим* называют звено, которое описывается уравнением $py = Kx$ или передаточной функцией $W(s) = K/s$.

Частотная передаточная функция $W(j\omega) = k/j\omega = -jK/\omega$. Остальные частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -K/\omega; \quad A(\omega) = K/\omega;$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2; \quad L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega; \quad h(t) = Kt; \quad w(t) = K.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 2.6, а) интегрирующего звена совпадает с отрицательной мнимой полусью. ЛФЧХ (рис. 2.6, б) параллельна оси частот и проходит на уровне $\varphi = -\pi/2$; сдвиг фазы не зависит от частоты и равен $-\pi/2$. ЛАЧХ (рис. 2.6, б) – наклонная прямая, проходящая через точку с координатами $\omega = 1$ и $L(\omega) = 20 \lg K$. Как видно из уравнения $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$, при увеличении частоты на одну декаду ордината $L(\omega)$ уменьшается на 20 дБ. Поэтому наклон ЛАЧХ равен -20 дБ/дек (читается: минус двадцать децибел на декаду). Переходная характеристика представляет собой пря-

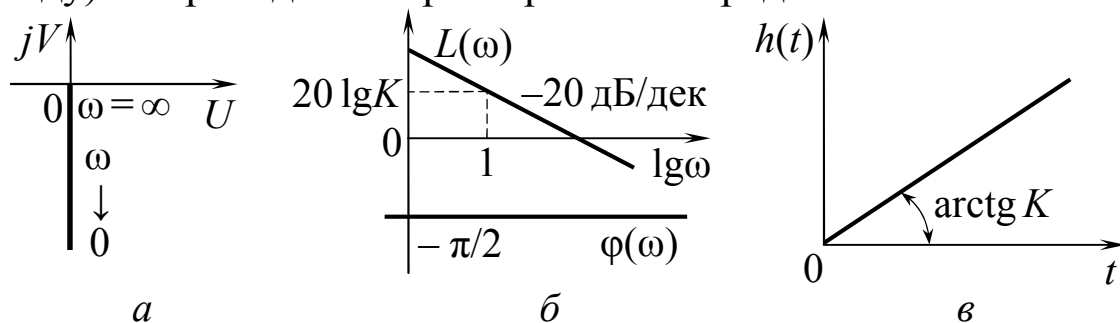


Рис. 2.6. Основные характеристики интегрирующего звена: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ФЧХ (б), переходная (в)

мую, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом наклона, равным K (рис. 2.6, в).

Дифференцирующее звено. *Дифференцирующим* называют звено, которое описывается уравнением $y = K\dot{x}$ или передаточной функцией $W(s) = Ks$. Частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = jK\omega; \quad U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = K\omega; \quad A(\omega) = K\omega;$$

$$\varphi(\omega) = \pi/2; \quad L(\omega) = 20\lg K + 20\lg \omega; \quad h(t) = \delta(t); \quad w(t) = \dot{\delta}(t).$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 2.7, а) совпадает с положительной мнимой полуосью. ЛФЧХ (рис. 2.7, б) параллельна оси частот и проходит на уровне

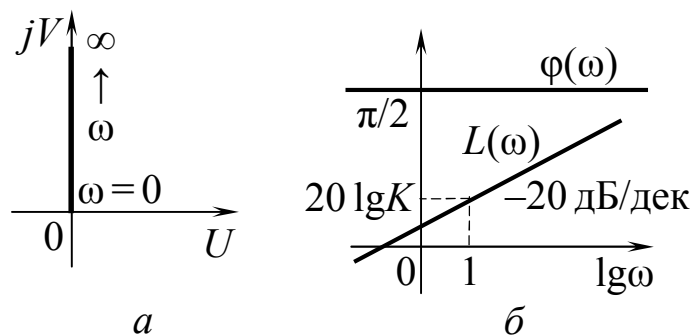


Рис. 2.7. Основные характеристики дифференцирующего звена: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ФЧХ (б)

$\varphi = \pi/2$; сдвиг фазы не зависит от частоты и равен $\pi/2$. ЛАЧХ есть прямая, проходящая через точку с координатами $\omega = 1$ и $L(\omega) = 20\lg K$ и имеющая наклон 20 дБ/дек (читается: плюс двадцать децибел на декаду); $L(\omega)$ увеличивается на 20 дБ при увеличении частоты на одну декаду.

Апериодическое звено. *Апериодическим звеном первого порядка* называют звено, которое описывается уравнением

$$(T_1 p + 1)y = Kx, \quad (2.44)$$

или передаточной функцией

$$W(s) = K/(T_1 s + 1).$$

Это звено также называют *инерционным звеном* или *инерционным звеном первого порядка*. Апериодическое звено в отличие от вышерассмотренных звеньев характеризуется двумя параметрами: постоянной времени T_1 и передаточным коэффициентом K .

Частотная передаточная функция апериодического звена

$$W(j\omega) = K / (T_1 j\omega + 1). \quad (2.45)$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю число, получим

$$U(\omega) = K / [(T_1\omega)^2 + 1]; \quad V(\omega) = -KT_1\omega / [(T_1\omega)^2 + 1]. \quad (2.46)$$

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно определить, воспользовавшись правилом модулей и аргументов.

Так как модуль числителя частотной передаточной функции (2.45) равен K , а модуль знаменателя $\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}$, то

$$A(\omega) = K / \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}. \quad (2.47)$$

Аргумент числителя $W(j\omega)$ равен нулю, а аргумент знаменателя $\arctg \omega T_1$, поэтому $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\arctg \omega T_1$. Из (2.47)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}. \quad (2.48)$$

Решив дифференциальное уравнение (2.44) при $x = 1(t)$ и нулевом начальном условии ($y(0) = 0$), получим $h(t) = K(1 - e^{-t/T_1})$.

Весовая функция

$$w(t) = h'(t) = (K/T_1)e^{-t/T_1}.$$

АФЧХ апериодического звена (рис. 2.8, а) есть полуокружность, в чем нетрудно убедиться, исключив из параметрических уравнений АФЧХ (2.46) частоту. Действительно, из первого равенства (2.46) имеем

$$(T_1\omega)^2 + 1 = \frac{K}{U}, \quad T_1\omega = \pm \sqrt{\frac{K}{U} - 1}.$$

Подставляя эти выражения во второе равенство (2.46), получаем уравнение относительно U и V

$$V = \pm U \sqrt{\frac{K - U}{U}}.$$

Возводя это уравнение в квадрат и выделяя полный квадрат $(U - K/2)^2$, приводим его к стандартному для кривых второго порядка виду

$$\left(U - \frac{K}{2}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2.$$

Это есть уравнение окружности на плоскости U, V с центром в точке $U = K/2, V = 0$ и радиусом $K/2$ (рис. 2.8, а). Причем на частоте $\omega = 0$ согласно равенствам (2.46) имеем точку $U = K,$

$V=0$, а при $\omega \rightarrow \infty$ – точку $U=0, V=0$. Следовательно, при изменении частоты от 0 до $+\infty$ АФЧХ апериодического звена описывает полуокружность с указанными параметрами.

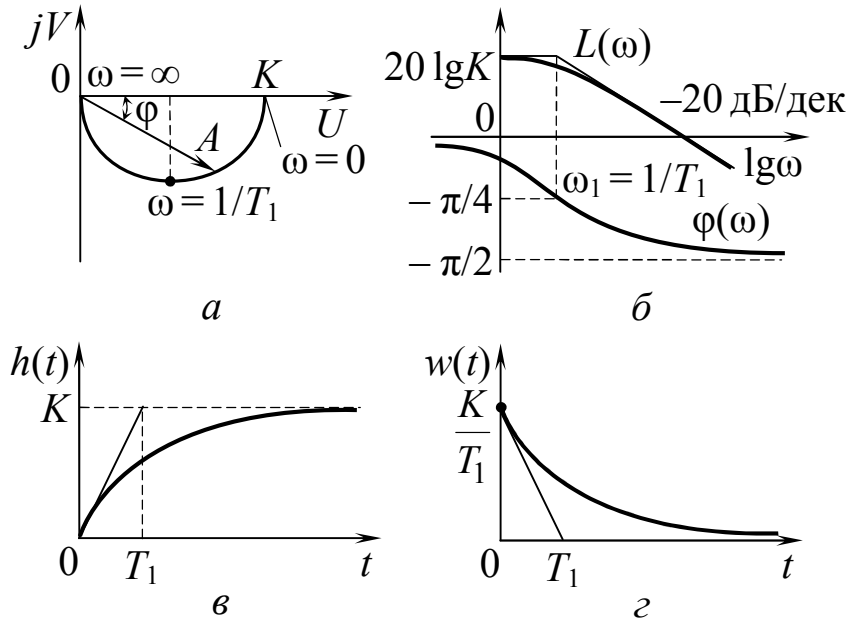


Рис. 2.8. Основные характеристики апериодического звена первого порядка: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ФЧХ (б), переходная (в), весовая (импульсная) (г)

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика представлена на рис. 2.8, б. На практике обычно ограничиваются построением так называемой асимптотической ЛАЧХ (ломаная линия на том же рис. 2.8, б).

При построении асимптотической ЛАЧХ на частотах $\omega < 1/T_1$ в правой части выражения (2.48) пренебрегают величиной $(T_1\omega)^2$ по сравнению с 1 и строят этот участок ЛАЧХ согласно равенству

$$L(\omega) = 20\lg K,$$

а на частоте $\omega > 1/T_1$, наоборот, пренебрегают единицей по сравнению с величиной $(T_1\omega)^2$ и строят соответствующий участок ЛАЧХ по формуле

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg T_1\omega.$$

Согласно полученным уравнениям, асимптотическую ЛАЧХ можно строить следующим образом: на уровне $L(\omega) = 20\lg K$ до частоты $\omega = \omega_1$ провести прямую, параллельно оси частот, а далее через точку с координатами $\omega = \omega_1$ и $L(\omega) = 20\lg K$ – прямую под наклоном -20 дБ/дек.

Только в критических случаях, когда небольшая погрешность может повлиять на выводы, рассматривают точную ЛАЧХ. Впрочем, точную ЛАЧХ можно легко построить по асимптотической ЛАЧХ если воспользоваться следующей зависимостью (ΔL – разность между асимптотической и точной ЛАЧХ):

$T_1\omega$...	0,10	0,25	0,40	0,50	1,0	2,0	2,5	4,0	10,0
ΔL , дБ	...	0,04	0,25	0,62	0,96	3,0	0,96	0,62	0,25	0,04

Частоту $\omega = 1/T_1$, при которой пересекаются асимптоты, называют *сопрягающей*. Точная и асимптотическая ЛАЧХ наиболее сильно отличаются при сопрягающей частоте; отклонение при этой частоте примерно равно 3 дБ.

Логарифмическая фазовая частотная характеристика изображена на рис. 2.8, б. Эта характеристика асимптотически стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$ и к $-\pi/2$ при $\omega \rightarrow \infty$. При $\omega = \omega_1$ фазовая частотная характеристика принимает значение $-\pi/4$, т. е. $\varphi(\omega_1) = -\pi/4$. ЛФЧХ всех апериодических звеньев имеют одинаковую форму и могут быть получены по какой-либо одной характеристике параллельным сдвигом вдоль оси частот влево или вправо в зависимости от постоянной времени T_1 . Поэтому для построения ЛФЧХ апериодического звена можно воспользоваться шаблоном или номограммой.

По АФЧХ или ЛАЧХ (рис. 2.8) легко определить параметры T_1 и K апериодического звена.

Переходная характеристика апериодического звена (рис. 2.8, в) представляет собой экспоненциальную кривую. По ней можно определить параметры: передаточный коэффициент, равный установившемуся значению $h(\infty)$; постоянную времени, равную значению t , соответствующему точке пересечения касательной к характеристике в начале координат с ее асимптотой (рис. 2.8, в).

Форсирующее звено. *Форсирующим звеном*, или *форсирующим звеном первого порядка* называют звено, которое описывается уравнением

$$y = K(T_1 p + 1)x,$$

или, что то же, передаточной функцией

$$W(s) = K(T_1 s + 1).$$

Это звено, как и апериодическое, характеризуется двумя параметрами: постоянной времени T_1 и передаточным коэффициентом K .

Частотная передаточная функция форсирующего звена

$$W(j\omega) = K(T_1 j\omega + 1).$$

Остальные частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$U(\omega) = K; \quad V(\omega) = KT_1\omega; \quad A(\omega) = K\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1};$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } T_1\omega; \quad L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1};$$

$$h(t) = K[T_1\delta(t) + 1(t)]; \quad w(t) = K[T_1\dot{\delta}(t) + \delta(t)].$$

АФЧХ (рис. 2.9, а) есть прямая, параллельная мнимой оси и пересекающая действительную ось в точке $U = K$. ЛАЧХ изображена на рис. 2.9, б. Как и в случае апериодического звена, на практике ограничиваются построением асимптотической ЛАЧХ (ломаная линия). Частоту $\omega_1 = 1/T_1$, соответствующую точке излома этой характеристики, называют *сопрягающей частотой*.

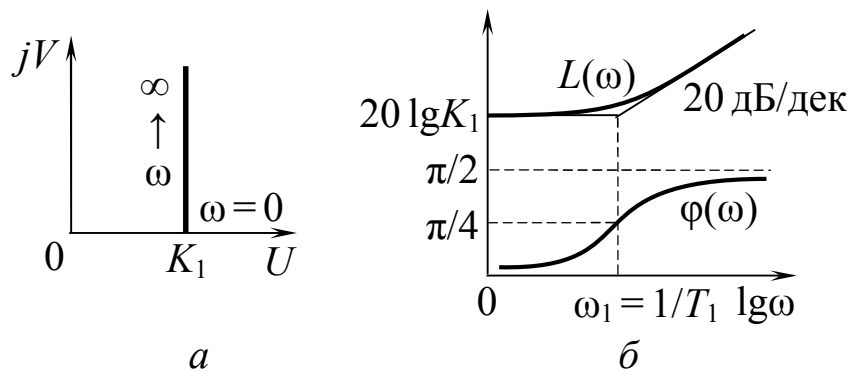


Рис. 2.9. Основные характеристики форсирующего звена: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ФЧХ (б)

Уравнение асимптотической ЛАЧХ форсирующего звена

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20\lg K & \text{при } \omega < \omega_1, \\ 20\lg K + 20\lg T_1\omega & \text{при } \omega \geq \omega_1. \end{cases}$$

Асимптотическая ЛАЧХ при $\omega < \omega_1$ параллельна оси частот и проходит на уровне $L(\omega) = 20\lg K$, а при $\omega \geq \omega_1$ имеет наклон 20 дБ/дек.

ЛФЧХ форсирующего звена можно получить зеркальным отражением относительно оси частот ЛФЧХ апериодического

звена и для ее построения можно воспользоваться тем же шаблоном и номограммой.

Форсирующее звено может быть представлено в виде параллельного соединения пропорционального и идеального дифференцирующего звеньев.

Апериодическое звено второго порядка. Уравнение и передаточная функция звена имеют вид

$$\begin{aligned} (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)y &= K_1 x, \\ W(s) &= \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $T_2 > 2T_1$. Передаточная функция (2.49) при $T_2 > 2T_1$ может быть записана в виде

$$W(s) = \frac{K_1}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}, \quad (2.50)$$

где $T_{3,4} = -1/s_{1,2}$, $s_{1,2}$ – это корни знаменателя (2.49). Получим следующее выражение для постоянных времени звеньев первого порядка

$$T_{3,4} = \frac{T_2}{2} \pm \sqrt{\frac{T_2^2}{4} - T_1^2}.$$

Передаточная функция (2.49) представляется также в виде

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1}, \quad (2.51)$$

где $\zeta = T_2/2T_1$ – коэффициент демпфирования. Тогда при $\zeta > 1$ постоянные времени звеньев первого порядка определяются выражением

$$T_{3,4} = T_1 \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) = \frac{T_1}{\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1}}.$$

Частотная передаточная функция аperiодического звена второго порядка согласно равенству (2.50) определяется так:

$$W(j\omega) = \frac{K_1}{(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)}, \quad (2.52)$$

ее вещественная и мнимая части

$$U(\omega) = \frac{K_1(1 - T_3 T_4 \omega^2)}{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}; \tag{2.53}$$

$$V(\omega) = -\frac{K_1 \omega (T_3 + T_4)}{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)},$$

где $T_3 T_4 = T_1^2$, $T_3 + T_4 = T_2$; АЧХ звена

$$A(\omega) = \frac{K_1}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}}, \tag{2.54}$$

и ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_3 \omega - \arctg T_4 \omega. \tag{2.55}$$

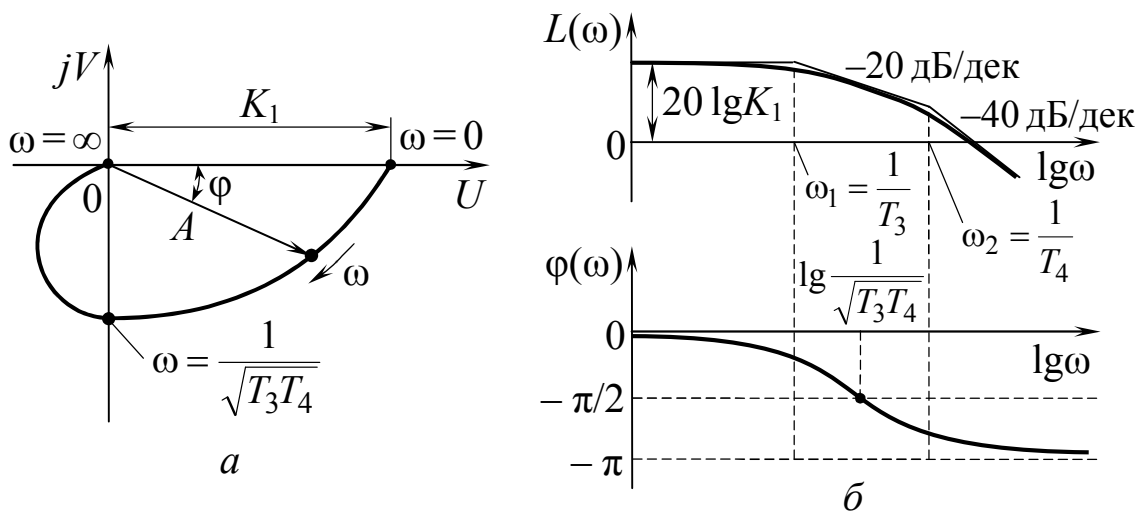


Рис. 2.10. Частотные характеристики аperiodического звена второго порядка: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ФЧХ (б)

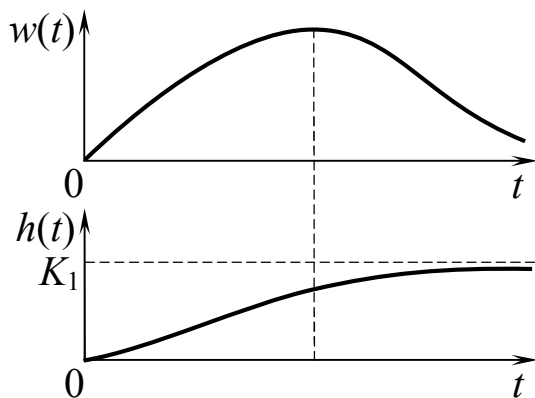


Рис. 2.11. Временные характеристики аperiodического звена второго порядка

Задаваясь частотой ω в пределах от 0 до ∞ , по формулам (2.53) вычисляем значения $U(\omega)$ и $V(\omega)$ и строим АФЧХ аperiodического звена второго порядка (рис.2.10, а). По формуле

$$L(\omega) = 20 \lg K_1 - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1},$$

вытекающей из (2.54), строится ЛАЧХ, а по формуле (2.55) – ЛФЧХ (рис. 2.10, б).

Представляя передаточную функцию (2.50) в виде суммы простых дробей

$$W(s) = \frac{K_1}{T_3 - T_4} \left(\frac{1}{s + 1/T_3} - \frac{1}{s + 1/T_4} \right),$$

находим весовую (импульсную) характеристику

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\} = \frac{K_1}{T_3 - T_4} \left(e^{-t/T_3} - e^{-t/T_4} \right), \quad t > 0, \quad (2.56)$$

показанную на рис. 2.11.

Аналогично, используя для данного звена разложение

$$\frac{1}{s} W(s) = K_1 \left(\frac{1}{s} - \frac{T_3}{T_3 - T_4} \frac{1}{s + 1/T_3} - \frac{T_4}{T_4 - T_3} \frac{1}{s + 1/T_4} \right),$$

находим переходную характеристику

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} W(s)\right\} = K_1 \left(1(t) - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} - \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-t/T_4} \right), \quad (2.57)$$

которая также показана на рис. 2.11.

Колебательное звено. Это звено описывается передаточной функцией (2.51), как и апериодическое звено второго порядка, но соответствует меньшим значениям коэффициента демпфирования ($0 < \zeta < 1$) и комплексно-сопряженным корням знаменателя передаточной функции

$$s_{1,2} = -\frac{\zeta}{T_1} \pm j \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{T_1}}.$$

Эти корни записываются также в виде

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \quad (2.58)$$

где $\alpha = \zeta / T_1$, $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2} / T_1$.

Частотная передаточная функция колебательного звена получается при постановке $s = j\omega$ в равенство (2.51)

$$W(j\omega) = \frac{K_1}{1 - T_1^2 \omega^2 + j2\zeta T_1 \omega}. \quad (2.59)$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю выражение, получим вещественную и мнимую частотные характеристики

$$U(\omega) = \frac{K_1(1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + (2\zeta T_1\omega)^2}; \quad (2.60)$$

$$V(\omega) = \frac{-2K_1\zeta T_1\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + (2\zeta T_1\omega)^2}.$$

Фазовая частотная характеристика, как это видно из АФЧХ (рис. 2.12, а), изменяется монотонно от 0 до $-\pi$ и выражается формулой

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T_1\omega}{1 - T_1^2\omega^2} & \text{при } \omega \leq 1/T_1, \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T_1\omega}{1 - T_1^2\omega^2} & \text{при } \omega > 1/T_1. \end{cases} \quad (2.61)$$

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (рис. 2.12, б) при $\omega \rightarrow 0$ асимптотически стремится к оси частот, а при $\omega \rightarrow \infty$ – к прямой $\varphi = -\pi$. Ее можно построить с помощью шаблона. Но для этого необходимо иметь набор шаблонов, соответствующих различным значениям коэффициента демпфирования.

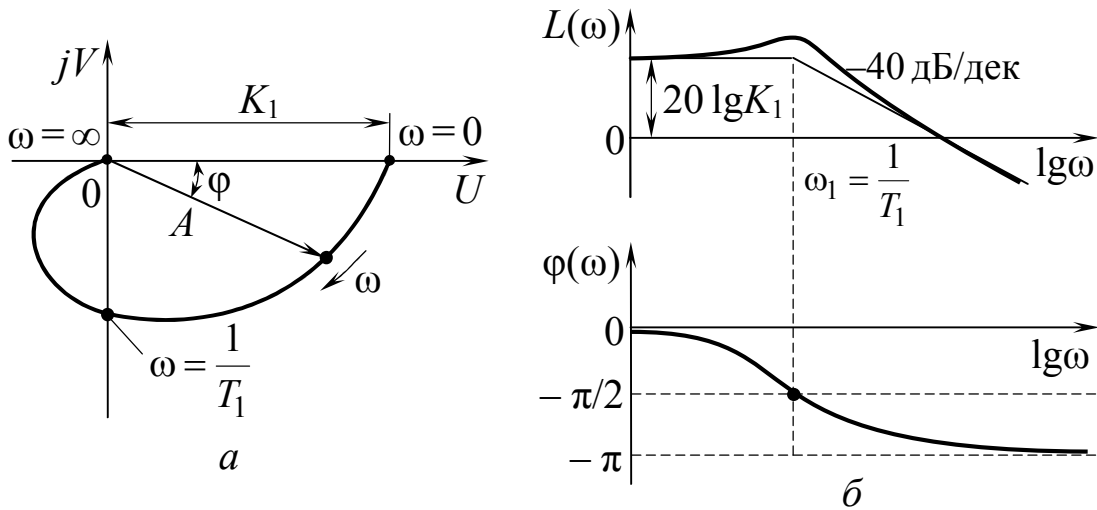


Рис. 2.12. Частотные характеристики колебательного звена: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ФЧХ (б)

Амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{K_1}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + (2\zeta T_1\omega)^2}.$$

ЛАЧХ описывается функцией

$$L(\omega) = 20 \lg K_1 - 20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + (2\zeta T_1\omega)^2}. \quad (2.62)$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20 \lg K_1 & \text{при } \omega < \omega_1; \\ 20 \lg K_1 - 40 \lg T_1 \omega & \text{при } \omega \geq \omega_1, \end{cases} \quad (2.63)$$

где $\omega_1 = 1/T_1$ является сопрягающей частотой. Оно получается из уравнения (2.62), если под корнем при $\omega < \omega_1$ оставить только единицу, а при $\omega \geq \omega_1$ – слагаемое $T_1^4 \omega^4$. Асимптотическая ЛАЧХ (рис. 2.12, б) при $\omega < \omega_1$ параллельна оси частот, а при $\omega \geq \omega_1$ имеет наклон -40 дБ/дек.

Следует иметь в виду, что асимптотическая ЛАЧХ (рис. 2.12, б) при малых значениях коэффициента демпфирования довольно сильно отличается от точной ЛАЧХ. Точную ЛАЧХ можно построить по асимптотической ЛАЧХ, воспользовавшись кривыми отклонений точных ЛАЧХ от асимптотических. Рассчитываем эти кривые как функции величины $T_1 \omega$ и коэффициента ζ (рис. 2.13).

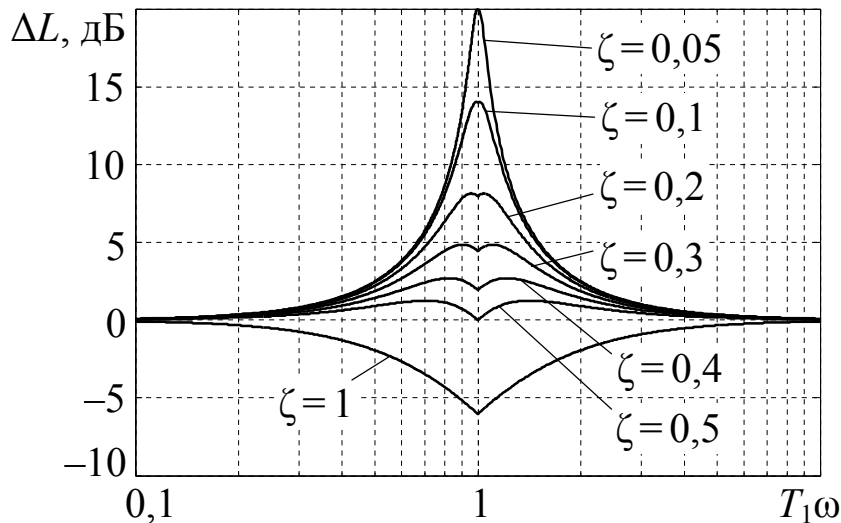


Рис. 2.13. Кривые поправок к асимптотическим ЛАЧХ колебательного звена

Согласно равенствам (2.62) и (2.63) имеем

$$\Delta L = \begin{cases} -20 \lg \sqrt{[1 - (T_1 \omega)^2]^2 + (2\zeta T_1 \omega)^2} & \text{при } T_1 \omega < 1; \\ -20 \lg \sqrt{[1 - (T_1 \omega)^2]^2 + (2\zeta T_1 \omega)^2} + 40 \lg T_1 \omega & \text{при } T_1 \omega > 1, \end{cases}$$

Решив дифференциальное уравнение колебательного звена

$$(T_1^2 p^2 + 2\zeta T_1 p + 1)y = K_1 x \quad (2.64)$$

при $x = 1(t)$ и нулевых начальных условиях $[y(0) = \dot{y}(0) = 0]$, найдем переходную функцию:

$$h(t) = K_1 \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \right], \quad (2.65)$$

где $\alpha = \zeta / T_1$; $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2 / T^2}$; $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$.

Весовая функция

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{K_1(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Пример 2.3. Приведем решение дифференциального уравнения колебательного звена (2.64).

Сначала воспользуемся операторным методом. Для этого преобразуем дифференциальное уравнение (2.64) по Лапласу с учетом правил дифференцирования оригинала:

$$(T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1)Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = K_1 X(s).$$

Отсюда найдем изображение выходной величины

$$Y(s) = W(s)X(s) + \frac{sy(0)}{T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1} + \frac{\dot{y}(0)}{T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1}.$$

Теперь остается по изображению $Y(s)$ найти оригинал. При нулевых начальных условиях $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ и $X(s) = 1/s$ получим

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{s(T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1)} \right\} = \\ &= K_1 L^{-1} \left\{ \frac{1}{T_1^2 s[(s + \alpha)^2 + \beta^2]} \right\} = K_1 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\} = \\ &= K_1 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s_1 + 2\alpha}{s_1 - s_2} \frac{1}{s - s_1} - \frac{s_2 + 2\alpha}{s_2 - s_1} \frac{1}{s - s_2} \right\}, \end{aligned}$$

где $s_{1,2}$ – корни характеристического уравнения звена, определяемые по (2.58).

В зависимости от того, насколько подробны имеющиеся в наличии таблицы преобразований Лапласа, можно определять оригинал одного из выражений в фигурных скобках. Если в таблице имеется оригинал первого выражения в фигурных скобках, то сразу получаем (2.65). Если имеются только соответствия

$$1(t) \doteq \frac{1}{s}; \quad e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{s + \alpha},$$

то находим решение в виде

$$h(t) = K_1 \left\{ 1(t) - \frac{s_1 + 2\alpha}{s_1 - s_2} e^{-s_1 t} - \frac{s_2 + 2\alpha}{s_2 - s_1} e^{-s_2 t} \right\}.$$

Это выражение, содержащее комплексно-сопряженные слагаемые, необходимо преобразовать с учетом (2.58) и равенства

$$\begin{aligned} & \frac{s_1 + 2\alpha}{s_1 - s_2} e^{-s_1 t} + \frac{s_2 + 2\alpha}{s_2 - s_1} e^{-s_2 t} = \\ & = \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} \left[\beta(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + \frac{\alpha}{j}(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \right] = \\ & = e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right). \end{aligned}$$

Таким образом, переходная характеристика колебательного звена имеет вид

$$h(t) = K_1 \left[1(t) - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right], \quad t \geq 0, \quad (2.66)$$

что совпадает с (2.65).

Решение уравнения (2.64) классическим методом ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения (свободной составляющей) и частного решения неоднородного уравнения (вынужденной составляющей). При комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения (2.58) свободная составляющая представляется в виде

$$C_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, зависящие от начальных условий.

Вынужденная составляющая решения при $x = 1(t)$ равна $K_1 1(t)$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.64) будем искать в виде

$$h(t) = K_1 \left[1(t) - C_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t \right].$$

Тогда первая производная решения

$$\dot{h}(t) = K_1 e^{-\alpha t} [(-\alpha C_1 + \beta C_2) \cos \beta t - (\alpha C_2 + \beta C_1) \sin \beta t].$$

При нулевых начальных условиях, подставляя $t = +0$ в выражения для $h(t)$ и $\dot{h}(t)$, получаем уравнения относительно C_1 и C_2

$$K_1(1 + C_1) = 0,$$

$$K_1(-\alpha C_1 + \beta C_2) = 0,$$

откуда следует $C_1 = -1$, $C_2 = -\alpha/\beta$ и получаем решение (2.66).

Если переходную характеристику колебательного звена (2.66) строить в функции βt , то характер кривой $h(t)/K_1$ зависит только от одного параметра ζ (рис. 2.14):

$$\frac{h(t)}{K_1} = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta} \beta t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right),$$

$$\frac{w(t)}{K_1} = \frac{\dot{h}(t)}{K_1} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t = \frac{1}{T_1 \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\frac{\alpha}{\beta} \beta t} \sin \beta t,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

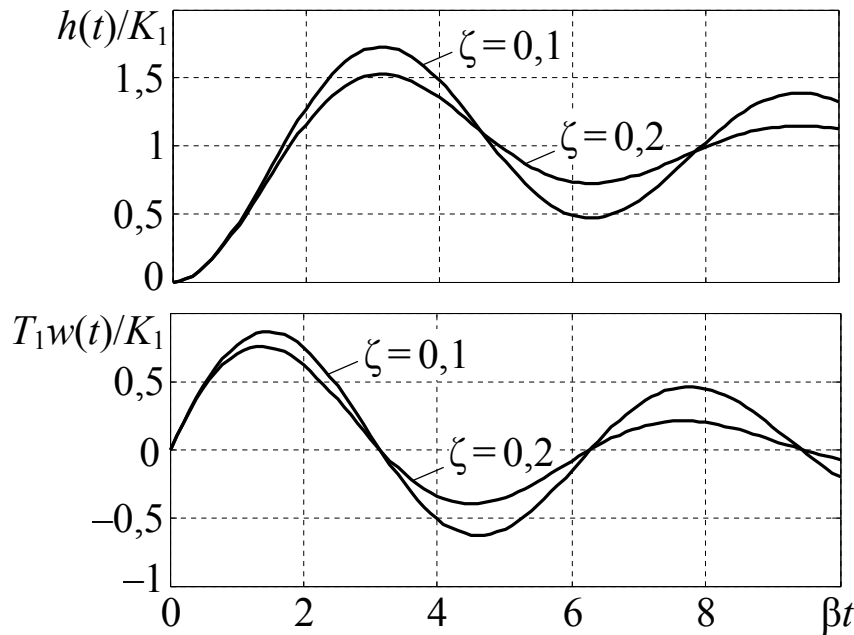


Рис. 2.14. Переходная и импульсная характеристики колебательного звена

Моменты максимумов и минимумов переходной характеристики совпадают с моментами нулей весовой функции. Момент первого максимума t_m соответствует $\beta t_m = \pi$, т. е. $t_m = \pi/\beta$. Значение первого максимума

$$h_m = K_1 \left(1 + e^{-\pi \alpha / \beta} \right).$$

Консервативное звено. При $\zeta = 0$ колебательное звено превращается в консервативное. Характеристическое уравнение будет иметь два чисто мнимых корня $s_{1,2} = \pm j/T_1$. Все характеристики консервативного звена получаются из характеристик колебательного звена при $\zeta = 0$.

Передаточная функция согласно (2.51)

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + 1},$$

частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{K_1}{1 - T_1^2 \omega^2},$$

что соответствует АФЧХ, показанной на рис. 2.15, а, ЛАЧХ и ЛФЧХ, представленным на рис. 2.15, б. Асимптотическая ЛАЧХ такая же, как и у колебательного звена, описываемая равенствами (2.63). Фазочастотная характеристика, как это следует из рис. 2.15, а,

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 1/T_1, \\ -\pi & \text{при } \omega > 1/T_1. \end{cases}$$

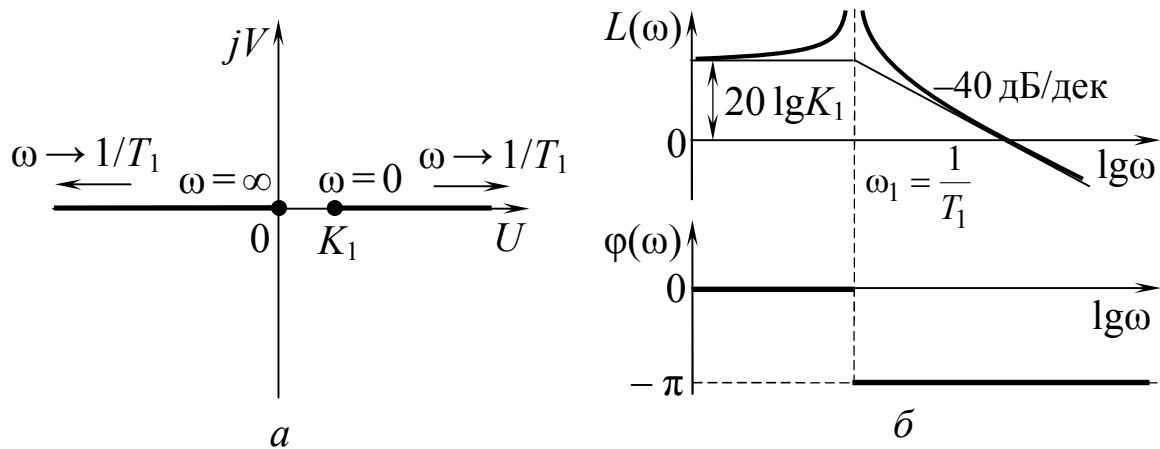


Рис. 2.15. Частотные характеристики консервативного звена: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ЛФЧХ (б)

Это же выражение можно получить из ФЧХ колебательного звена (2.61) переходом к пределу при $\zeta \rightarrow 0$.

Переходная характеристика консервативного звена получается из равенства (2.66) при $\alpha = 0$:

$$h(t) = K_1(1 - \cos \beta t), \quad t \geq 0,$$

где $\beta = 1/T_1$, а весовая (импульсная) характеристика

$$w(t) = K_1 T_1 \sin \beta t.$$

Форсирующее звено второго порядка. Так называют звено, которое описывается уравнением

$$y = K_1 (T_1^2 p^2 + 2\zeta T_1 p + 1) x$$

или, что то же, передаточной функцией

$$W(s) = K_1 (T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1) \quad (2.67)$$

при условии, что $0 \leq \zeta < 1$.

Не представляет трудности получить выражения для частотных и временных функций и построить соответствующие характеристики.

На рассмотрении этих вопросов останавливаться не будем. Заметим только, что при частотах, превышающих сопрягающую частоту, ЛАЧХ имеет наклон 40 дБ/дек и ЛФЧХ получается зеркальным отражением относительно оси частот ЛФЧХ соответствующего колебательного или консервативного звена. Если $\zeta \geq 1$, то звено с передаточной функцией (2.67) не относится к числу элементарных; его можно представить как последовательное соединение двух форсирующих звеньев первого порядка.

Неминимально-фазовые звенья. Звено называют *минимально-фазовым*, если все нули и полюсы его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части. Звено называют *неминимально-фазовым*, если хотя бы один нуль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

Напомним, что нулями передаточной функции

$$W(s) = \frac{K_1 N(s)}{L(s)},$$

где $N(s)$ и $L(s)$ – полиномы, имеющие свободные члены, равные 1, называются корни уравнения $N(s) = 0$, а полюсами – корни уравнения $L(s) = 0$.

Все рассмотренные выше элементарные звенья относятся к минимально-фазовым. Примерами неминимально-фазовых элементарных звеньев являются звенья с передаточными функциями:

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1 s - 1}; \quad W(s) = K_1 (T_1 s - 1);$$

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 - 2\zeta T_1 s + 1}; \quad W(s) = K_1 (T_1^2 s^2 - 2\zeta T_1 s + 1)$$

и др. Для неминимально-фазового звена характерно, что у него сдвиг фазы по модулю больше, чем у минимально-фазового звена, имеющего одинаковую с неминимально-фазовым звеном АЧХ.

На рис. 2.16 приведены ЛЧХ неминимально-фазовых звеньев с передаточными функциями $W(s) = K_1/(T_1 s - 1)$ (рис. 2.16, а) и $W(s) = K_1(T_1 s - 1)$ (рис. 2.16, б). ЛАЧХ этих звеньев совпадают с

ЛАЧХ апериодического (см. рис. 2.8, б) и форсирующего (см. рис. 2.9, б) звеньев. Сдвиг фазы у последних меньше: фазовые частотные характеристики апериодического и форсирующего звеньев по модулю не превышают значения $\pi/2$, а фазовые частотные характеристики соответствующих неминимально-фазовых звеньев достигают по модулю значения π .

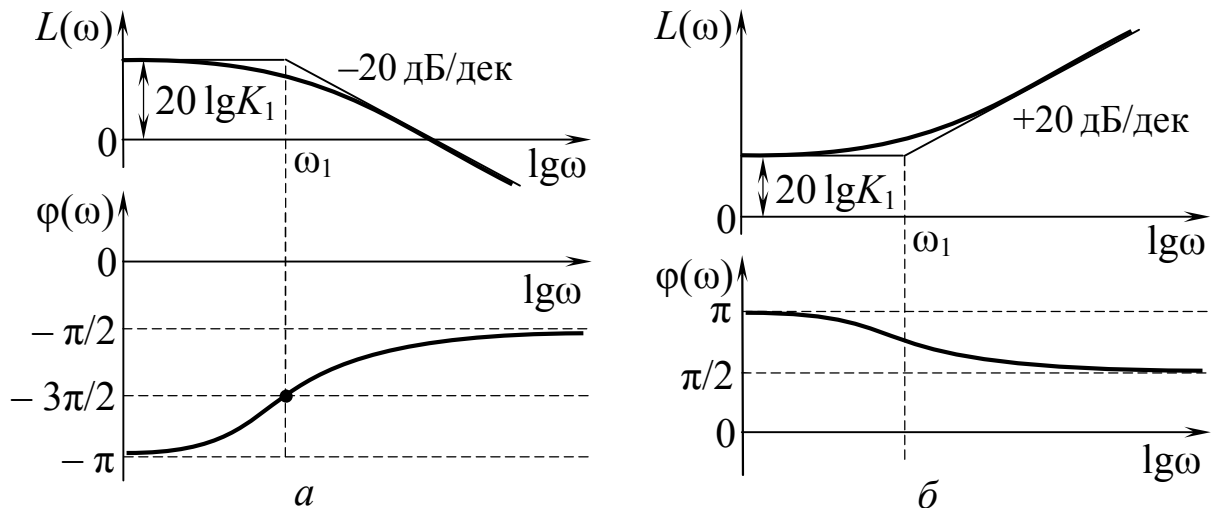


Рис. 2.16. Асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ неминимально-фазовых звеньев

Для звена с передаточной функцией $K_1/(T_1s - 1)$ ЛАЧХ описывается равенством (2.48), как и для апериодического звена первого порядка, а ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(-T_1\omega) = -\pi + \operatorname{arctg} T_1\omega,$$

поскольку при $\omega \rightarrow 0$ частотная передаточная функция

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = -K_1, \quad \text{а} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{j\omega T_1} = -j0.$$

Для звена с передаточной функцией $W(s) = K_1(T_1s - 1)$ ЛАЧХ имеет такой же вид, как и у форсирующего звена первого порядка (рис. 2.9, б). Поскольку частотная передаточная функция звена $W(j\omega) = K_1(T_1j\omega - 1)$ при $\omega = 0$ $W(j0) = -K_1$, то $\varphi(0) = \pm\pi$; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K_1 T_1 j\omega$, следовательно, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \pi/2$.

К неминимально-фазовым звеньям относят также звенья чистого запаздывания с передаточной функцией $W(s) = K_1 e^{-\tau_1 s}$, частотная передаточная функция у таких звеньев

$$W(j\omega) = K_1 e^{-j\tau_1 \omega} = K_1 (\cos \omega \tau_1 - j \sin \omega \tau_1).$$

АФЧХ звена чистого запаздывания (рис. 2.17, а) представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом K_1 .

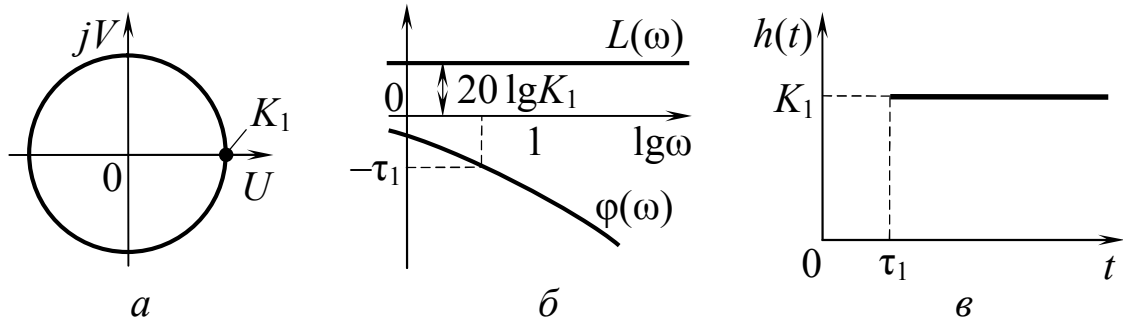


Рис. 2.17. Характеристики звена чистого запаздывания: АФЧХ (а), ЛАЧХ и ЛФЧХ (б), переходная (в)

Каждой точке этой характеристики соответствует бесконечное множество значений частот. ЛАЧХ (рис. 2.17, б) совпадает с ЛАЧХ пропорционального звена с передаточной функцией K_1 , ФЧХ описывается равенством $\varphi(\omega) = -\tau_1\omega$. Переходная характеристика приведена на рис. 2.17, в.

2.7. Примеры простейших усилительно-преобразовательных звеньев систем автоматического управления

Пример 2.4. Рассмотрим простейшую RC-цепь (рис. 2.18), которая в зависимости от параметров применяется в качестве реальной дифференцирующей или разделительной цепи. Для нее справедливо дифференциальное уравнение

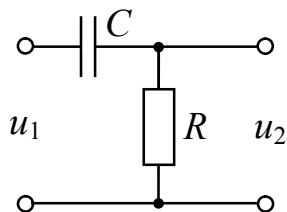


Рис. 2.18. Простейшая последовательная RC-цепь

$$RC \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = u_2,$$

откуда видно, что эта цепь является дифференцирующей только при выполнении условия $u_2 \ll u_1$, т. е. когда выходное напряжение намного меньше входного. Эта цепь может использоваться для дифференцирования сигналов конечной длительности (импульсов), которая намного больше постоянной времени

RC. Недостатком такой дифференцирующей цепи является малая амплитуда выходного сигнала.

Передаточная функция данной цепи (рис. 2.18)

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}.$$

Звено с передаточной функцией $W(s) = \frac{K_1 s}{T_1 s + 1}$ называется *инерционным дифференцирующим*.

Пример 2.5. Рассмотрим дифференцирующую цепь на идеальном операционном усилителе (ОУ) (рис. 2.19, а).

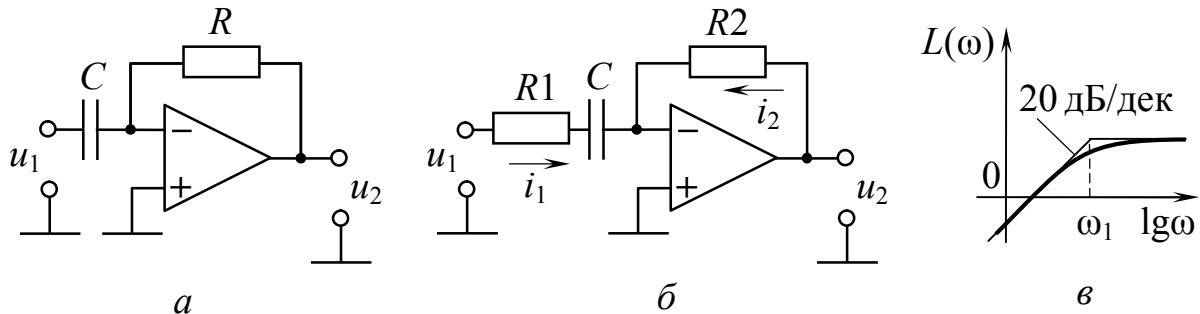


Рис. 2.19. Дифференцирующие цепи на операционном усилителе (а и б), ЛАЧХ для цепи на рис. 2.19, б

Поскольку у идеального ОУ входное сопротивление и коэффициент усиления для дифференциального сигнала бесконечно велики, а выходное сопротивление равно 0, записывая уравнение по первому закону Кирхгофа для инвертирующего входа, получаем

$$C \frac{du_1}{dt} + \frac{u_2}{R} = 0,$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$RCpu_1 = -u_2,$$

передаточная функция

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -RCs,$$

частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = -RCj\omega.$$

Поскольку коэффициент усиления дифференциального сигнала у реального ОУ, хотя и велик, но имеет конечное значение, полоса пропускания ОУ также конечна, на частотах ω , на которых значение $|W(j\omega)|$ приближаются к реальному коэффициенту усиления ОУ, точность дифференцирования резко снижается. Дифференцирование возможно лишь в ограниченной полосе частот.

Рассмотрим вторую схему дифференцирующей цепи (рис. 2.19, б), отличающуюся от первой наличием дополнительного резистора R_1 во входной части. При прежних допущениях для нее справедливы равенства

$$C \frac{d(u_1 - i_1 R_1)}{dt} = i_1,$$

$$i_1 + \frac{u_2}{R_2} = 0.$$

Выражая ток i_1 из второго равенства и подставляя в первое, получаем дифференциальное уравнение цепи (рис. 2.19, б)

$$R_1 C \frac{du_2}{dt} + u_2 = -R_2 C \frac{du_1}{dt}$$

и ее передаточную функцию

$$W(s) = -\frac{\tau_1 s}{T_1 s + 1},$$

где $\tau_1 = R_2 C$, $T_1 = R_1 C$ – постоянные времени цепи.

Асимптотическая ЛАЧХ цепи (рис. 2.19, б) показана на рис. 2.19, в, где сопрягающая частота $\omega_1 = 1/T_1$, причем

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg \tau_1 \omega & \text{при } \omega < \omega_1, \\ 20 \lg(R_2 / R_1) & \text{при } \omega \geq \omega_1. \end{cases}$$

Пример 2.6. Рассмотрим интегрирующие цепи (рис. 2.20).

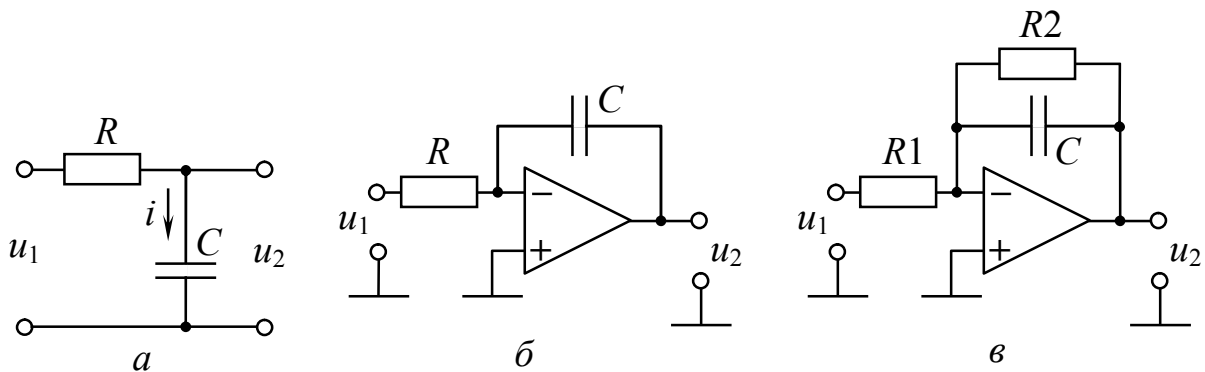


Рис. 2.20. Интегрирующие цепи: простейшая RC-цепь (а); цепи на операционном усилителе (б и в)

Поскольку для простейшей интегрирующей RC-цепи (рис. 2.20, а) напряжение на конденсаторе $u_2 = \frac{1}{C} \int idt$, где ток в цепи $i = (u_1 - u_2) / R$, получаем

$$u_2 = \frac{1}{RC} \int (u_1 - u_2) dt.$$

Отсюда видно, что интегрирование в этой цепи имеет место, когда выходное напряжение u_2 намного меньше входного u_1 . Для этого постоянная времени цепи RC должна быть намного больше времени интегрирования.

Дифференциальное уравнение этой цепи (рис. 2.20, а) имеет вид

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1,$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{1}{RCs + 1}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.44), приходим к выводу, что рассматриваемая цепь (рис. 2.20, а) представляет собой апериодическое звено с коэффициентом усиления $K = 1$ и постоянной времени $T_1 = RC$.

Для цепи на идеальном ОУ (рис. 2.20, б) уравнение по первому закону Кирхгофа для инвертирующего входа имеет вид

$$\frac{u_1}{R} + C \frac{du_2}{dt} = 0,$$

откуда находим дифференциальное уравнение

$$RC \frac{du_2}{dt} = -u_1,$$

передаточную функцию

$$W(s) = -\frac{1}{RCs}$$

и частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = -\frac{1}{RCj\omega},$$

которые соответствуют интегрирующему звену.

Недостатком этой цепи (рис. 2.20, б) является заметное увеличение коэффициента передачи $|W(j\omega)|$ на низких частотах и снижение точности интегрирования в связи с конечным коэффициентом усиления реального ОУ. Поэтому приходится ограничивать коэффициент передачи $|W(j\omega)|$ на низких частотах. Для этого конденсатор интегратора шунтируется дополнительным резистором R_2 (рис. 2.20, в). Тогда дифференциальное уравнение интегратора принимает вид

$$R_2 C \frac{du_2}{dt} + u_2 = -\frac{R_2}{R_1} u_1.$$

Значит, фактически на рис. 2.20, в имеем апериодическое звено с постоянной времени $R_2 C$ и коэффициентом усиления $-R_2/R_1$.

Интегрирование имеет место на частотах, превышающих значение $\omega_1 = 1/R_2 C$.

Пример 2.7. Рассмотрим цепь на ОУ (рис. 2.21, а), отличающуюся от цепи на рис. 2.19, а тем, что левый вывод конденсатора заземлен, а входной сигнал u_1 подается на неинвертирующий вход ОУ.

Уравнение по первому закону Кирхгофа для инвертирующего входа рис. 2.21, а имеет вид

$$-C \frac{du_1}{dt} + \frac{u_2 - u_1}{R} = 0,$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = u_2$$

и передаточная функция форсирующего звена

$$W(s) = RCs + 1$$

с постоянной времени RC и коэффициентом усиления $K = 1$.

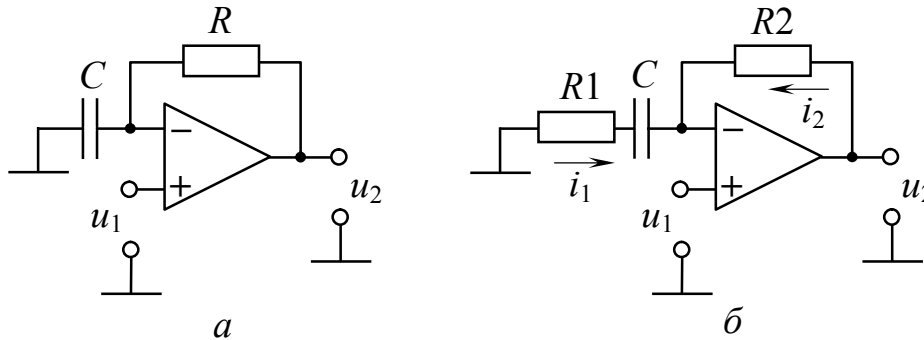


Рис. 2.21. Форсирующие звенья на ОУ

При введении дополнительного резистора $R1$ последовательно с дифференцирующим конденсатором C (рис. 2.21, б) можно записать следующее уравнение для токов на инвертирующем входе ОУ, потенциал которого равен u_1 :

$$i_1 = -C \frac{d(u_1 + i_1 R_1)}{dt},$$

$$i_1 + \frac{u_2 - u_1}{R_2} = 0.$$

Выражая ток i_1 из второго уравнения и подставляя в первое, получаем дифференциальное уравнение

$$\tau_2 \frac{du_1}{dt} + u_1 = T_1 \frac{du_2}{dt} + u_2$$

и передаточную функцию

$$W(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{T_1 s + 1} = \frac{\tau_1 s}{T_1 s + 1} + 1,$$

где $\tau_2 = (R_1 + R_2)C$, $T_1 = R_1 C$, $\tau_1 = R_2 C$.

2.8. Структурные схемы линейных систем и их преобразования

Структурной схемой в теории автоматического управления называют графическое изображение математической модели автоматической системы управления в виде соединений однонаправленных звеньев. Звено на структурной схеме условно обозначают в виде прямоугольника с указанием входных и вы-

ходных величин, а также передаточной функции внутри него. Иногда вместо передаточной функции указывают уравнение или характеристику. Звенья могут быть пронумерованы и их передаточные функции, уравнения или характеристики представлены вне структурной схемы.

Входные и выходные величины записывают в виде изображений, если передаточные функции задают в форме изображений. Если же передаточные функции задают в операторной форме или звенья описывают дифференциальными уравнениями, то входные и выходные переменные записывают в виде оригинала.

Суммирующие звенья изображают в виде окружностей с подходящими стрелками, соответствующими суммируемым величинам и отходящей от окружности линии, на которой формируется результат суммирования. Далее предполагается, что величины, подаваемые на суммирующее звено, могут суммироваться с изменением знака (т. е. вычитаться). Тогда около соответствующей стрелки, подходящей к окружности, будет ставиться знак « \leftarrow ».

Структурные схемы широко используют на практике при исследовании и проектировании автоматических систем управления, так как они дают наглядное представление о связях между звеньями, о прохождении и преобразовании сигналов в системе.

При математическом описании автоматическую систему обычно изображают в виде блок-схемы и для каждого «блока» (элемента) записывают уравнения, исходя из физических законов, которым подчиняются процессы в нем. Структурную схему можно составить на основании этой блок-схемы и полученных уравнений или только на основании последних. И дальнейшие преобразования, необходимые для получения уравнений и передаточных функций системы, проще и нагляднее производить по структурной схеме.

Звено на структурной схеме не обязательно изображает модель какого-либо отдельного элемента. Оно может быть моделью элемента, соединения элементов или вообще любой части системы.

Последовательное соединение звеньев (рис. 2.22). Пусть заданы передаточные функции всех звеньев:

$$\frac{X_2}{X_1} = W_1(s), \quad \frac{X_3}{X_2} = W_2(s), \quad \dots, \quad \frac{X_{n+1}}{X_n} = W_n(s),$$

где $X_i = X_i(s)$ – изображения по Лапласу переменных $x_i(t)$.

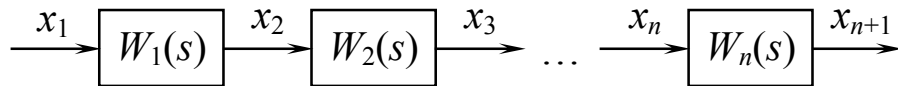


Рис.2.22. Цепь из последовательного соединения звеньев

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим

$$\frac{X_{n+1}}{X_1} = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$

Левая часть последнего равенства представляет собой передаточную функцию всей цепи из последовательно соединенных звеньев $W(s) = X_{n+1}/X_1$. Таким образом

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s), \quad (2.68)$$

т.е. передаточная функция разомкнутой цепи последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев.

Параллельное соединение звеньев (рис. 2.23). Передаточные функции отдельных звеньев в этом случае можно записать в виде

$$W_i(s) = \frac{X_i(s)}{X(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку выходная величина цепи равна

$$y = \sum_{i=1}^n x_i,$$

то ее изображение

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s).$$

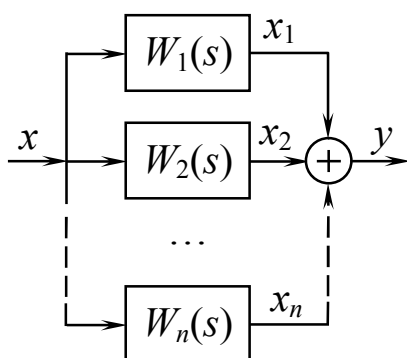


Рис.2.23. Цепь из параллельного соединения звеньев

Деля последнее равенство на изображение входной величины $X(s)$, получаем передаточную функцию всей цепи

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = W(s) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i(s)}{X(s)} = \sum_{i=1}^n W_i(s), \quad (2.69)$$

т. е. передаточная функция разомкнутой цепи параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций всех звеньев.

Цепь с местной обратной связью (рис. 2.24). На рис. 2.24 звено с передаточной функцией $W_2(s)$ охвачено отрицательной

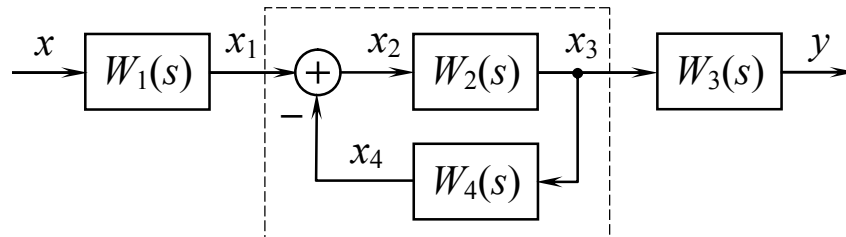


Рис. 2.24. Цепь с местной обратной связью

обратной связью через звено с передаточной функцией $W_4(s)$. Обратная связь называется отрицательной, если для суммирующего звена (рис. 2.24) справедливо уравнение

$$x_2 = x_1 - x_4.$$

Такое же уравнение справедливо для изображений сигналов

$$X_2 = X_1 - X_4, \quad (2.70)$$

где согласно схеме на рис. 2.24

$$X_4(s) = W_2(s)W_4(s)X_2(s).$$

Подставляя последнее выражение в равенство (2.70) и решая получающееся уравнение относительно $X_2(s)$, получаем

$$X_2(s) = \frac{X_1(s)}{1 + W_2(s)W_4(s)}.$$

Следовательно,

$$X_3(s) = W_2(s)X_2(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_4(s)} X_1(s),$$

и передаточная функция звена $W_2(s)$, охваченное отрицательной обратной связью через звено $W_4(s)$,

$$W_5(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_4(s)}. \quad (2.71)$$

Как видно из (2.71), передаточная функция звена, охваченного отрицательной обратной связью, равна передаточной функции охватываемого звена, деленной на единицу плюс про-

изведение передаточных функций охватываемого звена и звена обратной связи.

Передаточная функция всей показанной на рис. 2.24 цепи будет определяться как произведение

$$W(s) = W_1(s)W_5(s)W_3(s).$$

Преобразование структурных схем. Для удобства расчетов автоматических систем бывает необходимо преобразовать структурную схему системы к какому-либо желаемому виду. Например, для построения логарифмических частотных характеристик, как мы видели, наиболее удобно иметь последовательно соединенных звеньев.

Приведем здесь некоторые простейшие правила, пользуясь которыми можно производить преобразования структуры разомкнутой цепи системы автоматического управления к желаемому виду.

1. Можно использовать любую из трех формул (2.68), (2.69), (2.71) для разных случаев соединения звеньев. Пусть, например, задана структурная схема цепи звеньев в виде рис. 2.25, *a*. Тогда,

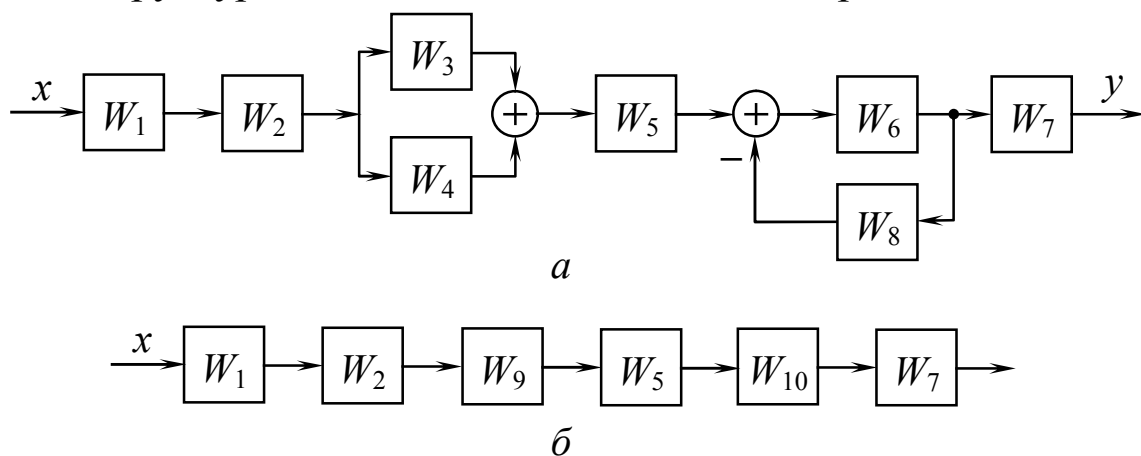


Рис. 2.25. Пример структурной схемы (*a*), ее преобразование к цепи из последовательного соединения звеньев (*б*)

пользуясь формулами (2.69) и (2.71), ее можно преобразовать к цепи последовательно соединенных звеньев (рис. 2.25, *б*), где

$$W_9(s) = W_3(s) + W_4(s), \quad W_{10}(s) = \frac{W_6(s)}{1 + W_8(s)W_6(s)},$$

а затем написать и общую передаточную функцию всей цепи

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_9(s)W_5(s)W_{10}(s)W_7(s).$$

2. Последовательно соединенные линейные звенья можно менять местами без изменения общей передаточной функции цепи. Это следует из формулы (2.69).

3. Можно переносить точки суммирования сигналов и точки съема сигналов вперед (по направлению прохождения сигнала) и назад (против направления прохождения сигнала) по цепи таким образом, чтобы не менялась передача сигнала на выход этой цепи. Такое преобразование структурных схем основывается на следующих правилах.

Если точка суммирования сигналов переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь необходимо включить звенья с передаточными функциями всех звеньев, встречающихся на пути между прежней и новой точками суммирования. Если точка суммирования сигналов переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить звенья с передаточными функциями, обратными передаточным функциям всех звеньев, встречающихся между новой и прежней точками суммирования (см. рис. 2.26).

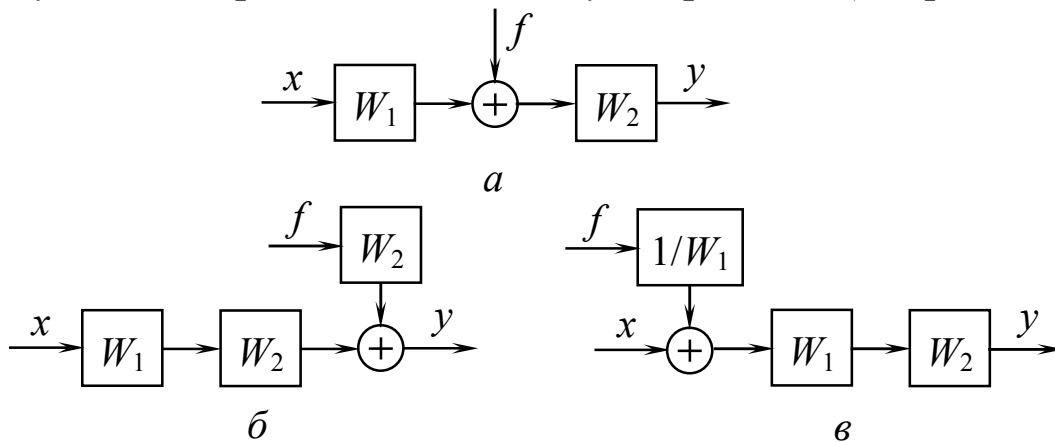


Рис. 2.26. Преобразование структурной схемы (а) путем переноса точки суммирования сигналов вперед (б) и назад (в)

Рассмотрим схему (рис. 2.26, а), для которой справедливо равенство

$$y = W_2(W_1x + f), \quad (2.72)$$

которое показывает, что сигнал x проходит через звено W_1 , результат прохождения суммируется с сигналом f , а затем результат суммирования проходит через звено W_2 . Равенство (2.72) может быть записано в виде

$$y = W_1W_2x + W_2f,$$

которое означает, что выходной сигнал y образуется как результат суммирования результатов прохождения сигнала x через звенья W_1 и W_2 и сигнала f через звено W_2 . Этому равенству соответствует структурная схема (рис. 2.26, б), полученная из исходной схемы (рис. 2.26, а) переносом точки суммирования вперед через звено W_2 .

Равенство (2.72) может быть также записано в виде

$$y = W_1 W_2 \left(x + \frac{f}{W_1} \right),$$

которое соответствует схеме на рис. 2.26, в и показывает, что выходной сигнал y формируется в результате прохождения через последовательное соединение звеньев сигналов x и f/W_1 .

Теперь сформулируем правила переноса точки съема сигнала. *Если точка съема сигнала переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить звенья с передаточными функциями, обратными передаточным функциям всех звеньев, встречающихся на пути между прежней и новой точками съема.*

Если точка съема сигнала переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить звенья с передаточными функциями всех звеньев, встречающихся на пути между новой и прежней точками съема.

В качестве примера рассмотрим схему (рис. 2.27, а), для которой справедливы равенства

$$x_1 = W_2 (W_1 x),$$

$$x_2 = W_3 (W_1 x),$$

которые означают, что сигнал x_1 образуется прохождением сигнала $W_1 x$ через звено W_2 , а сигнал x_2 путем пропускания сигнала $W_1 x$ через звено W_3 .

Записав эти равенства в виде

$$x_1 = W_1 W_2 x,$$

$$x_2 = \frac{W_3}{W_2} (W_1 W_2 x),$$

видим, что точку съема сигнала можно перенести вперед через звено W_2 , включив в переносимую ветвь звено с передаточной

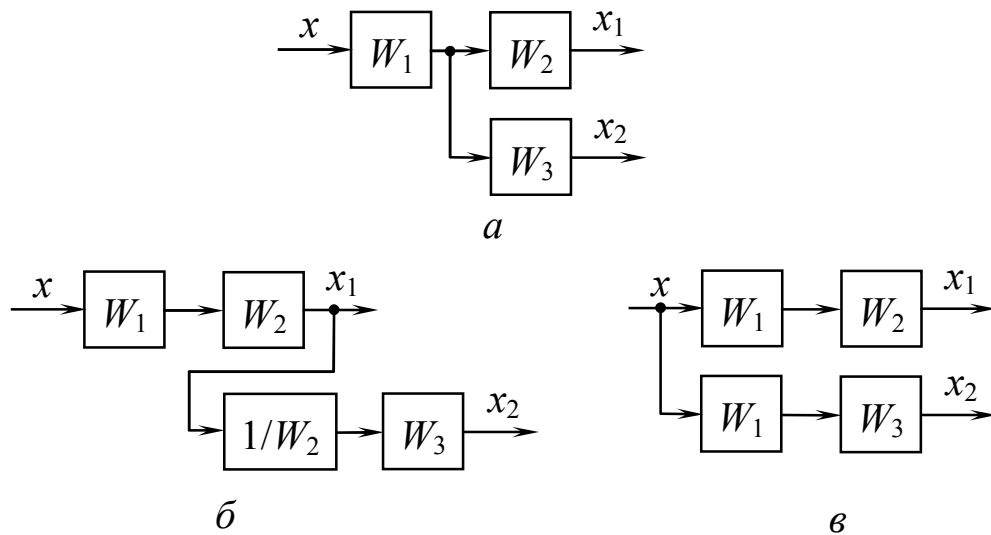


Рис. 2.27. Преобразование структурной схемы (а) путем переноса точки съема сигнала вперед (б) и назад (в)

функцией $1/W_2$. В результате этого получим структурную схему, показанную на рис. 2.27, б.

Аналогично, записав исходные равенства в виде

$$x_1 = W_1 W_2 x,$$

$$x_2 = W_1 W_3 x,$$

Убеждаемся в том, что точку съема сигнала можно перенести назад через звено W_1 и получить структурную схему на рис. 2.27, в.

Приведем пример получения общей передаточной функции разомкнутой цепи (рис. 2.28, а) с использованием структурных преобразований.

Сначала, пользуясь правилом переноса назад точки суммирования сигнала, переносим воздействие f с выхода звена W_1 на его вход. Тогда в ветвь с сигналом f нужно включить звено с передаточной функцией $1/W_1$ (рис. 2.28, б).

Точку съема сигнала, подаваемого на вход звена W_6 , перенесем вперед через звено W_3 . Тогда в переносимую ветвь (со звеном W_6) нужно включить звено с передаточной функцией $1/W_3$ (рис. 2.28, в).

Теперь, воспользовавшись правилами определения передаточных функций последовательного и параллельного соединения звеньев, а также звена с местной обратной связью, приходим к структурной схеме, изображенной на рис. 2.28, в, где

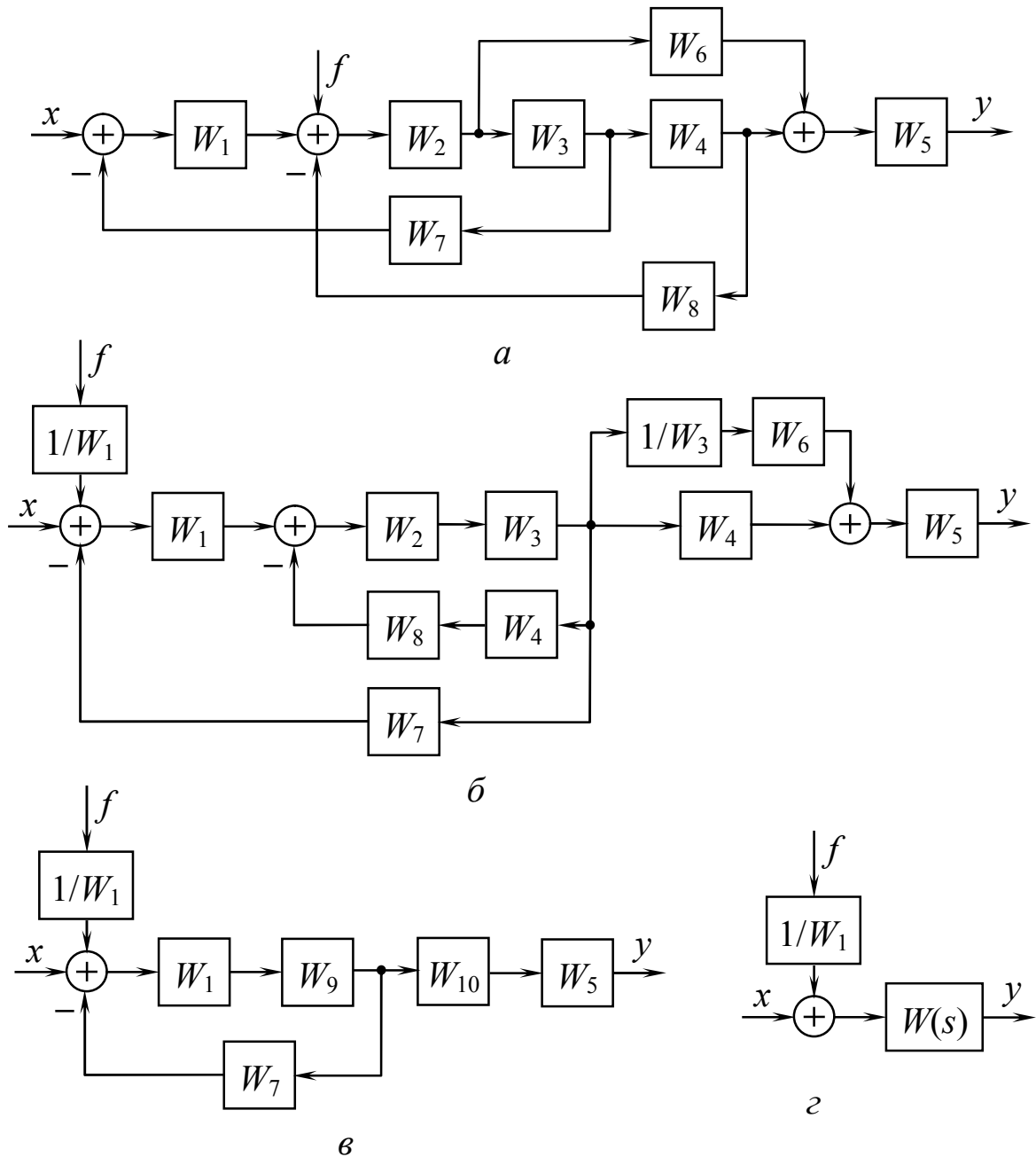


Рис. 2.28. К примеру преобразования структурной схемы: исходная схема (а); преобразованные (б, в и г)

$$W_9(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_8(s)};$$

$$W_{10}(s) = W_4(s) + \frac{W_6(s)}{W_3(s)}.$$

Наконец, исходную схему (рис. 2.28, а) можно представить в наиболее простом виде (рис. 2.28, г), где

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_9(s)}{1 + W_1(s)W_9(s)W_7(s)} W_{10}(s)W_5(s).$$

Аналогично этому примеру можно производить структурные преобразования, приводя к желаемым простым видам любые сложные структуры самых различных систем. Обратим внимание на то, что преобразования структурных схем эквивалентны соответствующим им преобразованиям уравнений системы.

2.9. Передаточные функции и уравнения замкнутой системы

Из цепи звеньев любой сложности, показанной здесь одним прямоугольником (рис. 2.29), получается замкнутая система при помощи единичной отрицательной обратной связи. Эту обратную связь называют *главной* в отличие от местных обратных связей, которые могут быть, как мы видели, внутри в составе разомкнутой цепи звеньев. Пусть имеются (рис. 2.29) внешние воздействия: $g(t)$ – задающее и $f(t)$ – возмущающее. В общем случае могут существовать несколько возмущающих воздействий, примененных в разных местах системы. Разность $e(t) = g(t) - x(t)$ называется *ошибкой регулирования*.

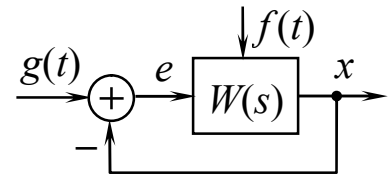


Рис. 2.29. Наиболее простое изображение замкнутой системы

Задана передаточная функция разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{X(s)}{E(s)}$$

в виде отношения многочленов с единичными коэффициентами при младших членах, т. е.

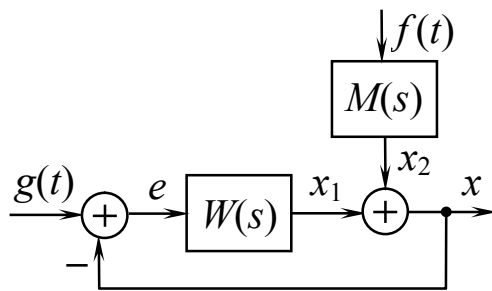
$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}, \quad (2.73)$$

где K – общий коэффициент усиления разомкнутой цепи.

Обратим внимание на то, что вместо термина «разомкнутая цепь» используются названия «разомкнутая система», «разомкнутый контур».

Передаточные функции замкнутой системы записываются отдельно для каждой комбинации входа и выхода, а значит, и для каждого внешнего воздействия в отдельности.

Разделим каналы прохождения сигналов в системе от каждого внешнего воздействия. Возмущающее воздействие $f(t)$ может быть приложено в любом месте. Но используя второе правило



структурных преобразований (§ 2.8), всегда можно выделить ту часть схемы, через которую проходят сигналы от $f(t)$ на выход x . Это показано на рис. 2.30 в виде передаточной функции $M(s)$.

Рис. 2.30. Изображение замкнутой системы с переносом на выход ветви с возмущающим воздействием

Цепь прохождения задающего воздействия $g(t)$ на выход системы имеет передаточную функцию $W(s)$. На выходе имеем формально

$$x = x_1 + x_2$$

(на самом деле $M(s)$ входит в передаточную функцию $W(s)$ в виде множителя).

Следовательно, основные соотношения в изображениях по Лапласу будут иметь вид

$$E(s) = G(s) - X(s), \quad (2.74)$$

$$X(s) = W(s)E(s) + M(s)F(s). \quad (2.75)$$

В расчетах автоматических систем применяют три основные вида передаточных функций замкнутой системы.

1. Главная передаточная функция замкнутой системы (при $f(t) = 0$):

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)}.$$

Из формул (2.74) и (2.75) при $F=0$ имеем

$$X(s) = W(s)[G(s) - X(s)],$$

откуда с учетом (2.73)

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{KN(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (2.76)$$

2. Передаточная функция замкнутой системы для ошибки (при $f(t) = 0$):

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{G(s)}.$$

По формуле (2.74) получаем

$$\frac{E(s)}{G(s)} = \frac{G(s) - X(s)}{G(s)} = 1 - \Phi(s).$$

откуда

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{L(s)}{L(s)+KN(s)}. \quad (2.77)$$

3. Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию (при $g(t) = 0$):

$$\Phi_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)}.$$

Подставляя выражение (2.74) в (2.75), получаем

$$X(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}G(s) + \frac{M(s)}{1+W(s)}F(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_f(s)F(s),$$

где

$$\Phi_f(s) = \frac{M(s)}{1+W(s)} = \frac{R(s)}{L(s)+KN(s)}, \quad (2.78)$$

$R(s) = L(s)M(s)$, причем многочлен $R(s)$ зависит от места приложения возмущающего воздействия. Заметим, что поскольку при $g(t) = 0$ имеем $E(s) = -X(s)$, то передаточная функция замкнутой системы для ошибки по возмущающему воздействию $\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)}$ будет отличаться от $\Phi_f(s)$ только знаком.

Важно отметить, что знаменатель всех видов передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$, $\Phi_e(s)$, $\Phi_{ef}(s)$ один и тот же.

Изображение выходной величины замкнутой системы с учетом как задающего $g(t)$, так и возмущающего $f(t)$ воздействий будет

$$X(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_f(s)F(s)$$

или

$$X(s) = \frac{KN(s)}{L(s)+KN(s)}G(s) + \frac{R(s)}{L(s)+KN(s)}F(s).$$

Умножая все это равенство на общий знаменатель и заменяя комплексное число s на оператор дифференцирования p , получим дифференциальное уравнение замкнутой системы для регулируемой величины x в виде

$$[L(p) + KN(p)]x = KN(p)g(t) + R(p)f(t). \quad (2.79)$$

Итак, зная передаточные функции звеньев системы, можно чисто алгебраическим путем найти общее дифференциальное уравнение всей замкнутой системы в целом при любой ее сложности. В этом состоит, в частности, одно из важных практических преимуществ использования аппарата передаточных функций.

Фигурирующие здесь операторные многочлены $L(p)$ и $KN(p)$ соответствуют знаменателю и числителю передаточной функции разомкнутой цепи $W(s)$, а операторный многочлен $R(p)$ зависит от места приложения возмущающего воздействия $f(t)$.

Дифференциальное уравнение замкнутой системы (2.79) записывают также в виде

$$D(p)x = KN(p)g(t) + R(p)f(t). \quad (2.80)$$

где

$$D(p) = L(p) + KN(p). \quad (2.81)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$D(\lambda) = 0 \text{ или } L(\lambda) + KN(\lambda) = 0. \quad (2.82)$$

Очевидно, что корни λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) этого характеристического уравнения равны полюсам s_i передаточной функции замкнутой системы (2.76).

Как видим, порядок дифференциального уравнения замкнутой системы (2.80), как и разомкнутой цепи определяется степенью n многочлена $L(p)$ (так как степень $N(p)$ ниже). Однако коэффициенты уравнений разомкнутой и замкнутой систем существенно отличны друг от друга за счет прибавления многочлена $KN(p)$ в уравнение (2.81). Поэтому и все динамические свойства процессов в замкнутой системе будут существенно отличаться от таковых в разомкнутой цепи, состоящей из тех же самых звеньев.

В развернутом виде в обычной записи уравнение динамики замкнутой системы (2.80) получает вид

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f_1(t), \quad (2.83)$$

где

$$f_1(t) = b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_m g(t) + \beta_0 \frac{d^r f(t)}{dt^r} + \dots + \beta_r f(t).$$

Как разомкнутая, так и замкнутая система могут быть описаны также системой дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши (разрешенных относительно производных)

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}v_1 + \dots + b_{im}v_m, \quad i = 1, \dots, n,$$

где x_i – переменные состояния; v_j – внешние воздействия, к которым относятся задающие и все возмущающие воздействия. Введя в рассмотрение n -мерный вектор состояния \mathbf{x} и m -мерный вектор внешних воздействий \mathbf{v}

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

рассматриваемую систему уравнений можем записать в векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (2.85)$$

где \mathbf{A} – матрица коэффициентов (матрица состояний), \mathbf{B} – матрица, определяющая влияние внешних воздействий (матрица входов), имеющие вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.85) необходимо дополнить уравнением выходов

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}, \quad (2.86)$$

где \mathbf{C} – матрица выхода, в одномерной системе единственная выходная (регулируемая) величина, $\mathbf{C} = \|c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1n}\|$, $\mathbf{D} = \|d_{11} \ d_{12} \ \dots \ d_{1m}\|$ – матрицы-строки. В многомерных системах левая часть в равенстве (2.86) представляет собой некоторый вектор, а число строк в матрицах \mathbf{C} и \mathbf{D} будет равно числу выходов системы.

Для получения передаточной функции системы по ее уравнениям в векторно-матричной форме (2.85) и (2.86) преобразуем уравнение (2.85) по Лапласу при нулевых начальных условиях. Тогда получаем

$$(s\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица порядка n . Умножив последнее равенство слева на обратную матрицу $(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$, найдем вектор состояния

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{v}.$$

Подставив это выражение в равенство (2.86), получим выражение вектора выхода y через вектор входных воздействий

$$y = \mathbf{W}(s)\mathbf{v}, \quad (2.87)$$

где $\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$ – передаточная матрица системы.

В одномерном случае (y – скалярная величина) $\mathbf{W}(s)$ и представляет передаточную функцию системы. В многомерном случае элемент $W_{ij}(s)$ матрицы $\mathbf{W}(s)$ представляет собой передаточную функцию от j -го входа v_j до i -го выхода y_i .

2.10. Построение модели в форме пространства состояний по дифференциальному уравнению n -го порядка

Для одномерной системы легко написать матрицы канонических форм пространства состояний по передаточной функции (2.18)

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n},$$

которой соответствует дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = \\ = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u, \end{aligned} \quad (2.88)$$

Запишем дифференциальное уравнение n -го порядка в символической форме

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) u,$$

откуда следует условие для выбора координаты x_1

$$(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)^{-1} y = (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)^{-1} u = x_1.$$

Отсюда имеем

$$y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x_1, \quad (2.89)$$

$$u = (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x_1. \quad (2.90)$$

Остальные переменные состояния выбираем следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \quad (2.91)$$

следовательно, $px_1 = x_2$, $p^2 x_1 = px_2 = x_3$, \dots , $p^{n-1} x_1 = x_n$, $p^n x_1 = px_n$.

Тогда из равенства (2.90) с учетом (2.91) следует n -е уравнение состояния

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{1}{a_0} (a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1) + \frac{1}{a_0} u. \quad (2.92)$$

Следовательно, матрица состояния имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

а матрица входов

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \hline a_0 \end{pmatrix}.$$

Из равенства (2.89) с учетом (2.91) следует

$$y = b_0 x_{m+1} + b_1 x_m + \dots + b_m x_1,$$

откуда матрица выхода

$$\mathbf{C} = \| b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \|$$

представляет собой строку из $m + 1$ ненулевых элементов.

Уравнения с матрицей (2.93) называют **уравнениями в форме Фробениуса** [13].

Еще один способ построения модели в форме пространства состояний состоит в следующем [13]. Выходная переменная y выражается через первую координату пространства состояний

$$y = x_1 + \beta_0 u, \quad (2.94)$$

а уравнение состояний выбирается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + \beta_1 u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 + \beta_2 u, \\ &\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n + \beta_{n-1} u, \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{1}{a_0} (a_n x_1 + a_{n-1} x_2 + \dots + a_1 x_n) + \beta_n u, \end{aligned} \quad (2.95)$$

где координаты x_1, x_2, \dots, x_n отличны от определяемых из равенств (2.91).

Без ограничения общности можно принять $m = n$ (если $m < n$, то соответствующее число коэффициентов в числителе передаточной функции $W(s)$ принимается равным нулю).

Коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, входящие в уравнения (2.94), (2.95), необходимо выразить через известные коэффициенты дифференциального уравнения (2.88). Для этого, выразив координату x_1 из уравнения (2.94), подставим в первое уравнение (2.95). Затем, выразив x_2 из получившегося уравнения, подставим во второе уравнение (2.95) и т. д. Тогда получим равенства

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u, \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} - \left(\beta_0 \frac{du}{dt} + \beta_1 u \right), \\ x_3 &= \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\beta_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_2 u \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} - \left(\beta_0 \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \beta_1 \frac{du^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + \beta_{n-1}u \right).$$

Подставив эти равенства в последнее уравнение (2.95), получим дифференциальное уравнение n -го порядка

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y}{dt^n} + \frac{a_1}{a_0} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{dy}{dt} + \frac{a_n}{a_0} y = \\ & = \beta_0 \frac{d^n u}{dt^n} + \left(\beta_1 + \frac{a_1}{a_0} \beta_0 \right) \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \left(\beta_2 + \frac{a_2}{a_0} \beta_0 + \frac{a_1}{a_0} \beta_1 \right) \frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} + \\ & + \dots + \left(\beta_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{a_0} \beta_0 + \dots + \frac{a_2}{a_0} \beta_{n-3} + \frac{a_1}{a_0} \beta_{n-2} \right) \frac{du}{dt} + \\ & + \left(\beta_n + \frac{a_n}{a_0} \beta_0 + \frac{a_{n-1}}{a_0} \beta_1 + \dots + \frac{a_2}{a_0} \beta_{n-2} + \frac{a_1}{a_0} \beta_{n-1} \right) u. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты этого уравнения с коэффициентами уравнения (2.88), получаем тождества, из которых следуют выражения для определения коэффициентов уравнений (2.94), (2.95) для случая $m = n$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{b_0}{a_0}, \\ \beta_1 &= \frac{b_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \beta_0, \\ \beta_2 &= \frac{b_2}{a_0} - \left(\frac{a_2}{a_0} \beta_0 - \frac{a_1}{a_0} \beta_1 \right), \\ &\dots \\ \beta_{n-1} &= \frac{b_{n-1}}{a_0} - \left(\frac{a_{n-1}}{a_0} \beta_0 + \dots + \frac{a_2}{a_0} \beta_{n-3} + \frac{a_1}{a_0} \beta_{n-2} \right), \\ \beta_n &= \frac{b_n}{a_0} - \left(\frac{a_n}{a_0} \beta_0 + \frac{a_{n-1}}{a_0} \beta_1 + \dots + \frac{a_2}{a_0} \beta_{n-2} + \frac{a_1}{a_0} \beta_{n-1} \right). \end{aligned} \tag{2.96}$$

Если в уравнении (2.88) $m = n - 1$, то в выражении (2.94) необходимо принять $b_0 = 0$, тогда $\beta_0 = 0$. Номера остальных коэффициентов b_i в выражениях (2.96) необходимо уменьшить на 1.

Аналогично поступаем при $m = n - 2$, когда $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, а номера остальных коэффициентов b_i необходимо уменьшить на 2.

Из равенств (2.95) следует, что матрица \mathbf{A} в данном случае также будет иметь вид (2.93), но измениться матрица \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

Матрицы \mathbf{C} и \mathbf{D} согласно равенству (2.94) превращаются в скалярные величины 1 и β_0 .

Еще одно представление в пространстве состояний можно получить, разложив передаточную функцию $W(s)$ на элементарные дроби

$$W(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}, \quad (2.98)$$

где λ_i – корни характеристического уравнения.

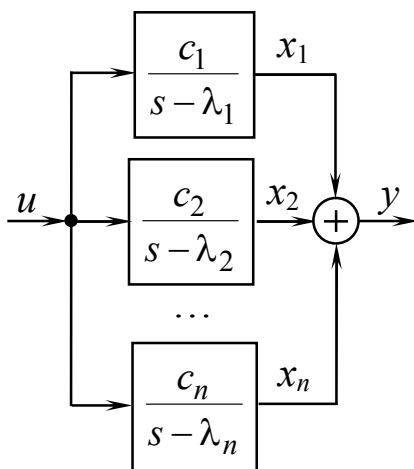


Рис.2.31. Представление системы в виде параллельного соединения звеньев

Равенство (2.98) эквивалентно представлению системы в виде параллельного соединения элементарных звеньев первого порядка (рис. 2.31), для которого справедливо уравнение

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad (2.99)$$

где переменные состояния x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + c_1 u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 x_2 + c_2 u, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + c_n u.$$

Из уравнений (2.100) видно, что матрицы состояний и входов в данном случае имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (2.99) следует, что

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Сходным образом можно построить описание системы в пространстве состояний и для случая кратных корней.

Подобные описания базируются на знании корней характеристического уравнения, что на практике является существенным недостатком, ограничивающим его применение [13].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

12. Что такое математическая модель системы автоматического управления (САУ)?
13. Каковы в общем виде уравнения динамики и статика САУ?
14. Что такое линеаризация САУ?
15. Как выполняется линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений САУ?
16. Что такое стационарные и нестационарные САУ?
17. В каких формах могут быть записаны линейные дифференциальные уравнения САУ?
18. Что такое передаточная функция звена или системы управления? Каков общий стандартный вид передаточной функции?
19. Какова стандартная форма записи дифференциального уравнения линейного звена или системы?
20. Что такое частотная передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика (АФЧХ) звена или системы?
21. Как определяются логарифмические частотные характеристики звена или системы?
22. Как получить дифференциальное уравнение по передаточной функции звена или системы?
23. Каков физический смысл частотной передаточной функции звена или системы?
24. Что такое переходная характеристика и импульсная переходная характеристика звена или системы, какова связь между ними?
25. Каковы основные элементарные звенья линейных САУ?
26. Что такое апериодическое звено?
27. Что такое колебательное звено?
28. Что такое форсирующее звено?
29. Что такое структурная схема САУ или ее части?
30. Как определяется передаточная функция цепи из последовательного соединения звеньев?
31. Как определяется передаточная функция цепи из параллельного соединения звеньев?

32. Как определяется передаточная функция звена, охваченного обратной связью?

33. Каковы правила преобразования структурной схемы путем переноса точки суммирования сигналов вперед или назад?

34. Каковы правила преобразования структурной схемы путем переноса точки съема сигнала вперед или назад?

35. Каковы передаточные функции и уравнения замкнутой системы?

36. Как можно найти передаточную функцию замкнутой системы по возмущению?

37. Как систему линейных дифференциальных уравнений САУ можно записать в векторно-матричной форме?

38. Как можно найти передаточную матрицу системы по ее уравнениям состояния и выходов?

39. Как можно построить математическую модель в форме пространства состояний по дифференциальному уравнению n -го порядка (n – порядок системы)?

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Требования, предъявляемые к системам управления

Анализ систем управления состоит в изучении их общесистемных свойств, условий выполнения ими своих функций и достижения заданных целей. В результате анализа качественно констатируются свойства поведения систем в целом и количественно оценивается степень удовлетворения требований к процессам управления. Анализ в широком смысле должен также объяснять, почему система с определенной структурой причинно-следственных взаимосвязей элементов с известными характеристиками имеет то или иное поведение.

Безусловными требованиями к свойствам поведения систем управления являются:

- 1) устойчивость движений;
- 2) инвариантность управляемой переменной к возмущениям и ковариантность с задающим воздействием;
- 3) грубость (параметрическая инвариантность, робастность), т. е. ограниченная чувствительность свойств системы к вариациям характеристик элементов.

Основными задачами анализа систем управления, обычно решаемыми методами теории управления, являются:

- 1) установление фактов устойчивости, инвариантности и робастности;
- 2) построение характеристик и вычисление показателей качества;
- 3) вывод об удовлетворительном (или не удовлетворительном) поведении системы.

Процессы в системах управления определяются решением дифференциального уравнения динамики системы (рис. 3.1, *a*), полученного в разных формах записи в § 2.9. Это решение для регулируемой величины имеет вид

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{в}(t), \quad (3.1)$$

где $x_{св}(t)$ – свободный процесс (движение), определяемый общим решением соответствующего однородного уравнения,

$$x_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (3.2)$$

а $x_{\text{в}}(t)$ – вынужденный процесс, определяемый как частное решение неоднородного уравнения (с правой частью, включающей в себя задающее и возмущающее воздействия); λ_i – корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$, которые предполагаются различными; C_i – постоянные, определяемые по начальным условиям, для решения (3.1).

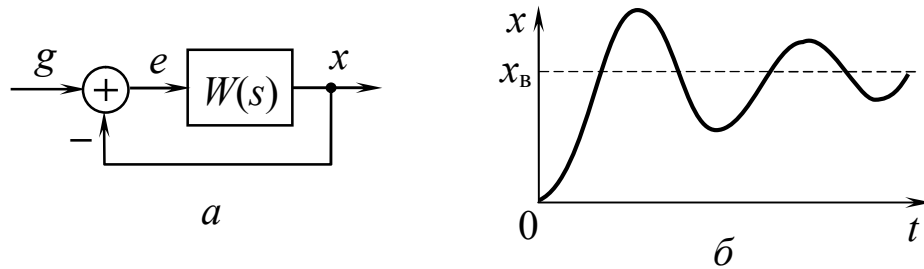


Рис. 3.1. Наиболее простое изображение системы управления (а); переходный процесс при скачкообразном задающем воздействии (б)

В случае наличия кратных корней в характеристическом уравнении $D(\lambda) = 0$ решение вместо (3.2) имеет вид

$$x_{\text{св}} = \sum_{i=1}^k P_i(t) e^{\lambda_i t}, \quad (3.3)$$

где $P_i(t)$ многочлен степени $l_i - 1$, если l_i кратность корня, а через k обозначено число различных корней λ_i . В реальных системах автоматического управления кратность корней маловероятна.

Вторая часть решения (3.1) $x_{\text{в}}(t)$, отвечающая правой части дифференциального уравнения динамики замкнутой системы

$$D(p)x = KN(p)g(t) + R(p)f(t),$$

представляет собой *установившуюся часть процесса управления*. На нее накладывается переходный процесс (3.2), который теоретически длится бесконечно, но его влияние практически становится ничтожным через конечное время. После затухания переходной составляющей устанавливается процесс $x_{\text{в}}(t)$. Это проиллюстрировано, например, на рис. 3.1, б для случая постоянного внешнего воздействия.

Устойчивость по начальным условиям (по Ляпунову) – свойство собственно системы. Если система устойчива, то зату-

хают все составляющие свободных движений (3.2), вызванных любыми ненулевыми начальными условиями.

Под *инвариантностью* систем управления понимается независимость некоторых ее переменных от воздействий. Инвариантность – свойство операторов преобразований.

Управляемая переменная системы $x(t)$ в общем случае зависит как от задающего $g(t)$, так и возмущающего $f(t)$ воздействий. При этом переменная выхода $x(t)$ должна быть инвариантной к возмущению и ковариантной с заданием $g(t)$.

Изображение переменной выхода системы при нулевых начальных условиях определяется равенством

$$X(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_f(s)F(s).$$

Основным в теории инвариантности является случай, когда о воздействиях нет никакой информации (в том числе статистического характера). Это значит, что для *абсолютной инвариантности* должно выполняться условие равенства нулю передаточной функции для всех значений комплексного аргумента:

$$\Phi_f(s) = 0 \text{ для всех } s. \quad (3.4)$$

Абсолютная ковариантность управляемой переменной с задающим воздействием достигается при условии:

$$\forall s : \Phi(s) = 1.$$

При выполнении условия (3.4) оказываются нулевыми установившаяся $x_{уст}(t)$ и переходная $x_{пер}(t)$ составляющие вынужденного движения системы. Однако в системе с ненулевыми предначальными условиями имеют место свободные движения.

Условие абсолютной инвариантности (3.4) – тождественное равенство нулю передаточной функции системы – реализуется редко. Обычно добиваются условий *инвариантности до ε*

$$\forall s : |\Phi_f(s)| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

т. е. ограничивают степень и высоту полинома числителя передаточной функции (операторного полинома при воздействии) [2].

При выполнении условия (3.5) оказываются ограниченными вынужденные составляющие движений.

Близким к инвариантности до ε является понятие устойчивости вход-выход. Оба понятия связаны со свойством оператора преобразования входных переменных [2].

Оценка ковариантности систем управления связана с анализом ошибки регулирования. Установившаяся ошибка воспроизведения задающего сигнала $g(t)$

$$e_{\text{уст}}^{g(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s)G(s)s. \quad (3.6)$$

Оценка инвариантности по возмущающему воздействию $f(t)$ требует анализа составляющей ошибки, вызванной возмущающим воздействием $f(t)$,

$$e_{\text{уст}}^{f(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_f(s)F(s)s. \quad (3.7)$$

Параметры системы автоматического управления, т. е. коэффициенты усиления и постоянные времени, зависят от физических параметров элементов, входящих в систему (сопротивления, емкости, индуктивности и т. п.). Значения этих физических параметров, во-первых, могут иметь разброс вследствие допусков на изготовление (*технологический разброс*). Во-вторых, в зависимости от условий эксплуатации в процессе работы системы они по разным причинам могут изменяться со временем (*эксплуатационное изменение*).

Поэтому возникает задача определения влияния разброса и изменения параметров системы на статические и динамические свойства процесса управления, т. е. на точность системы, на временные характеристики (показатели качества переходных процессов) и на частотные характеристики.

Степень влияния разброса и изменения параметров системы на ее статические и динамические свойства называется **чувствительностью системы**. Чувствительность определяется количественно. Существуют методы ее анализа и методы достижения малой чувствительности проектируемой системы к разбросу и изменению некоторых ее параметров, когда это требуется.

Изменение параметров системы приводит к изменению ее оператора, например, передаточной функции, она будет описываться дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Система становится **нестационарной**.

Если изменение оператора системы происходит медленнее свободных и вынужденных процессов, то система называется **квазистационарной**.

В этом случае можно рассматривать множество стационарных моделей системы, различающихся значениями параметров, а иногда и структурой операторов.

3.2. Анализ чувствительности

Для систем управления важно, чтобы малые вариации операторов звеньев не приводили к большим (качественным) изменениям свойств систем в целом, например, к потере устойчивости. Иными словами, необходимо, чтобы система была *грубой*. Работоспособная система управления должна быть инвариантной к возмущениям и устойчивой. Эти свойства системы должны быть также малочувствительны к вариациям операторов звеньев.

Чувствительность количественно характеризует влияние малых изменений свойств элементов на свойства системы. Если изменяются параметры системы, то анализируют чувствительность к этим параметрам. Если малым *неструктурированным* вариациям подвержены операторы звеньев систем с раскрытой причинно-следственной структурой, то применяют методы структурной теории чувствительности. Чувствительность передаточных функций систем позволяет анализировать влияние свойств звеньев на условия инвариантности и ковариантности, а чувствительность характеристических полиномов – на условия устойчивости и характер переходных процессов [2].

Абсолютная чувствительность передаточной функции системы $\Phi(s)$ к вариации передаточной функции звена $W(s)$ определяется как частная производная

$$T_W^\Phi = \partial\Phi(W)/\partial W. \quad (3.8)$$

Эта функция комплексного аргумента s позволяет в первом приближении найти вариацию передаточной функции системы $\delta\Phi(s)$ по известной вариации передаточной функции звена $\delta W(s)$

$$\delta\Phi(s) \approx T_W^\Phi(s)\delta W(s).$$

Относительная чувствительность S_W^Φ отражает связь между относительными вариациями передаточных функций или частотных характеристик

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi} \approx S_W^\Phi \frac{\delta W}{W}. \quad (3.9)$$

Связь между относительной и абсолютной функциями чувствительности с учетом равенства $\frac{\partial\Phi}{\partial W} = \frac{\delta\Phi}{\delta W}$ имеет вид

$$S_W^\Phi = T_W^\Phi \frac{W}{\Phi}. \quad (3.10)$$

Чувствительность систем с типовой структурой. Чувствительность характеристик системы, образованной соединением звеньев, зависит от ее структуры.

Передаточная функция системы, образованной последовательным соединением звеньев (рис. 3.2), равна произведению передаточных функций

$$\Phi = W_1 W_2.$$

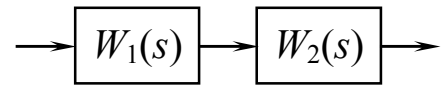


Рис. 3.2. Последовательное соединение звеньев

Пусть изменяются характеристики первого звена

$$W_1 = W_{10} + \delta W_1.$$

Передаточная функция соединения при этом запишется так:

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi = (W_{10} + \delta W_1)W_2 = W_{10}W_2 + W_2\delta W_1,$$

т. е. $\delta\Phi = W_2\delta W_1$ и абсолютная функция чувствительности

$$T_{W_1}^\Phi = W_2.$$

Относительная чувствительность определяется по формуле (3.10):

$$S_{W_1}^\Phi = T_{W_1}^\Phi \frac{W_1}{\Phi} = 1. \quad (3.11)$$

Аналогичный результат получится и для относительной чувствительности к W_2 , т. е. $S_{W_2}^\Phi = 1$.

Вообще, относительная чувствительность последовательного соединения к любому из звеньев равна единице. Это значит, что изменение модуля передаточной функции или АЧХ любого из звеньев на сколько-то процентов приводит к изменению модуля передаточной функции системы и ее частотной характеристики на столько же процентов. Следовательно, нельзя изменить относительную чувствительность системы путем последовательного включения новых звеньев или удаления части существующих.

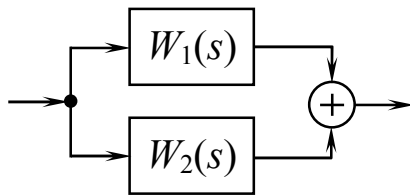


Рис. 3.3. Параллельное соединение звеньев

Передаточная функция системы, образованной параллельным соединением звеньев (рис. 3.3), равна сумме передаточных функций:

$$\Phi = W_1 + W_2 .$$

Пусть изменяется первое звено

$$W_1 = W_{10} + \delta W_1 .$$

Передаточная функция системы при этом запишется так:

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi = W_{10} + \delta W_1 + W_2 .$$

Следовательно, $\delta\Phi = \delta W_1$ и абсолютная функция чувствительности для этой структуры всегда равна единице:

$$T_{W_1}^{\Phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial W_1} = \frac{\delta\Phi}{\delta W_1} = 1 .$$

Выражение для относительной функции чувствительности находится по формуле (3.10):

$$S_{W_1}^{\Phi} = T_{W_1}^{\Phi} \frac{W_1}{\Phi} = \frac{W_1}{\Phi} = \frac{W_1}{W_1 + W_2} . \quad (3.12)$$

Чем больше модуль передаточной функции варьируемого звена W_1 , тем больше относительная чувствительность, т. е. вклад звена в передачу системы в целом. Если

$$|W_1(s)| \gg |W_2(s)| ,$$

то $S_{W_1}^{\Phi} \approx 1$; если

$$|W_1(s)| \ll |W_2(s)| ,$$

то $S_{W_1}^{\Phi} \approx 0$.

Уменьшить чувствительность передачи системы к вариациям звена можно увеличением усиления неварьируемого звена, подсоединенного параллельно.

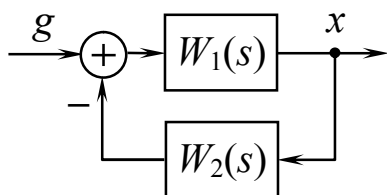


Рис. 3.4. Система с отрицательной обратной связью

Передаточная функция системы с отрицательной обратной связью (рис. 3.4) равна

$$\Phi = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} .$$

Пусть варьируется передача звена, находящегося в прямом пути:

$$W_1 = W_{10} + \delta W_1 .$$

Абсолютная функция чувствительности находится дифференцированием выражения $\Phi(W_1)$:

$$T_{W_1}^{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial W_1} = \frac{1}{(1 + W_1 W_2)^2}.$$

Относительная функция чувствительности определяется по формуле (3.10):

$$S_{W_1}^{\Phi} = T_{W_1}^{\Phi} \frac{W_1}{\Phi} = \frac{1}{1 + W_1 W_2}, \quad (3.13)$$

она равна отношению передаточной функции системы к передаточной функции варьируемого звена

$$S_{W_1}^{\Phi} = \Phi / W_1.$$

По выражению (3.13) можно заключить, что использование обратной связи позволяет существенно изменить относительную чувствительность. При повышении усиления контура за счет любого из звеньев относительная чувствительность системы с отрицательной обратной связью уменьшается. Отрицательная обратная связь существенно уменьшает влияние вариаций в прямом пути на передачу всего соединения, если велико усиление контура. Этим широко пользуются на практике. Поскольку объект управления находится в прямом пути, то повышение усиления контура при стабильной обратной связи уменьшает чувствительность передачи системы по каналу воспроизведения задающего воздействия.

В динамических системах усиление контура на различных частотах неодинаково. Следовательно, обратная связь уменьшает чувствительность только в тех интервалах частот, где усиление велико. На частотах, где усиление контура мало, относительная чувствительности характеристики замкнутой системы будет близка к единице.

Большое усиление контура обеспечивает инвариантность переменной выхода системы с обратной связью к сигнальному возмущению. Далее установлено, что одновременно ослабляется и влияние параметрических воздействий среды. В этом заключается универсальность обратной связи.

Пусть теперь изменяются характеристики звена обратной связи:

$$W_2 = W_{20} + \delta W_2.$$

Тогда абсолютная функция чувствительности передачи системы к вариациям звена

$$T_{W_2}^{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial W_2} = -\frac{W_1^2}{(1 + W_1 W_2)^2}.$$

Выражение для относительной чувствительности имеет вид

$$S_{W_2}^{\Phi} = T_{W_2}^{\Phi} \frac{W_2}{\Phi} = -\frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2}, \quad (3.14)$$

она равна произведению передаточной функции системы и передаточной функции варьируемого звена с обратным знаком:

$$S_{W_2}^{\Phi} = -\Phi W_2.$$

При повышении усиления контура $|W_1 W_2|$ относительная чувствительность к вариациям характеристик звена обратной связи увеличивается:

$$|W_1(s) W_2(s)| \rightarrow \infty, \quad S_{W_2}^{\Phi} \rightarrow -1.$$

Применительно к системам управления, реализующим принцип управления по отклонению, можно говорить о необходимости стабильной обратной связи.

3.3. Оценка точности регулирования в установившемся режиме

Оценка точности регулирования системы (рис. 3.1, а) в установившемся режиме сводится к анализу ошибки регулирования по формулам (3.6) и (3.7) при некоторых типовых воздействиях $g(t)$ и $f(t)$.

Наиболее часто определяют:

1) ошибку при ступенчатом воздействии $g(t) = g_0 1(t)$, называемую *статической ошибкой*;

2) ошибку при линейно изменяющемся воздействии

$$g(t) = 1(t)(g_0 + g_1 t), \quad (3.15)$$

называемую *скоростной ошибкой*;

3) ошибку при полиномиальном воздействии

$$g(t) = 1(t)(g_0 + g_1 t + \dots + g_v t^v), \quad (3.16)$$

где $v \geq 2$ – целое положительное число;

4) ошибку при гармоническом воздействии.

Если для определенного задающего воздействия $g(t)$ ошибка $e_{уст}^{g(t)} = 0$, то говорят, что обеспечивается абсолютная ковариантность с задающим воздействием. Если же для определенного возмущающего воздействия $f(t)$ ошибка $e_{уст}^{f(t)} = 0$, то говорят об инвариантности к возмущающему воздействию.

Пусть для рис. 3.1 передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением (2.23), т. е.

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)},$$

где многочлены $N(s)$ и $L(s)$ не содержит множителя s (их свободные члены равны единице).

Тогда передаточная функция замкнутой системы (рис. 3.1, а) для ошибки будет равна

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{L(s)}{L(s)+KN(s)}, \quad (3.17)$$

а дифференциальное уравнение относительно ошибки –

$$[L(p)+KN(p)]e = L(p)g(t), \quad (3.18)$$

где $p = d/dt$.

Согласно теореме о конечном значении (см. § 2.2), выражение установившейся ошибки принимает вид (3.6).

В случае $g(t) = g_0 = \text{const}$ изображение задающего воздействия

$$G(s) = \frac{g_0}{s}.$$

Тогда по формуле (3.6) с учетом (3.16) получаем значение статической ошибки

$$e_{уст} = \frac{g_0}{1+K}, \quad (3.19)$$

так как свободные члены многочленов $N(s)$ и $L(s)$ равны единице.

Статическую ошибку можно столь же просто получить из дифференциального уравнения (3.18) как частное решение при $g(t) = g_0$.

Если же подавать на вход системы задающее воздействие (3.15), изменяющееся с постоянной скоростью, то и установив-

шаяся ошибка $e(t)$ как частное решение уравнения (3.15) тоже будет изменяться с постоянной скоростью. При достаточно длительном воздействии такое нарастание ошибки недопустимо.

Для ликвидации этого явления нужно изменить структуру системы так, чтобы многочлен $L(s)$ не имел свободного члена, т. е. чтобы

$$L(s) = sL_1(s); \quad (3.20)$$

другими словами, передаточная функция разомкнутой цепи этой системы $W(s)$ должна иметь нулевой полюс.

В самом деле, при воздействии (3.15), изображение которого есть

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2},$$

по формуле (3.6) с учетом (3.17) и (3.18) получим

$$e_{уст} = \frac{g_1}{K}. \quad (3.21)$$

Следовательно, в такой системе при задающем воздействии с постоянной скоростью не будет нарастающей ошибки. Это постоянное значение ошибки называется **скоростной ошибкой** $e_{уст} = e_{ск}$.

Значение скоростной ошибки легко можно получить из дифференциального уравнения системы (3.18) при условии $L(p) = pL_1(p)$, как частное решение, учитывая, что при воздействии (3.15) имеем

$$pg(t) = g_1.$$

При постоянном же задающем воздействии $g(t) = \text{const} = g_0$ в такой системе установившаяся ошибка будет равна нулю ($e_{ст} = 0$), обеспечивается ковариантность с задающим воздействием.

Итак, система, обладающая свойством (3.20), т. е. нулевым полюсом в передаточной функции разомкнутой цепи $W(s)$, не будет иметь статической ошибки и даст постоянное значение скоростной ошибки.

Такая система называется **астатической системой** в отличие от системы, не имеющей нулевого полюса в разомкнутом состоянии.

Очевидно, что все следящие системы и системы программного управления должны проектироваться как ас-

статические. Системы же автоматического регулирования, настраиваемые на поддержание постоянного значения регулируемой величины, допустимо иметь и статические ошибки.

Как видно из формул ошибок (3.19) и (3.21), для уменьшения значения ошибки нужно добиваться достаточно большого значения общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи проектируемой системы. Поэтому величина K именуется **добротностью системы**.

Можно строить системы автоматического управления также с астатизмом второго и более высокого ν -го порядка, когда многочлен $L(s)$ имеет вид соответственно

$$L(s) = s^2 L_1(s) \quad \text{и} \quad L(s) = s^\nu L_1(s), \quad (3.22)$$

т. е. с двойным нулевым полюсом или нулевым полюсом ν -го порядка в передаточной функции $W(s)$ разомкнутой цепи.

Тогда, если мы возьмем задающее воздействие в виде (3.16)

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_{\nu-1} t^{\nu-1} + g_\nu t^\nu,$$

для которого имеем изображение

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \frac{2g_2}{s^3} + \dots + \frac{(\nu-1)!g_{\nu-1}}{s^\nu} + \frac{\nu!g_\nu}{s^{\nu+1}},$$

то по формуле (3.16) с учетом (3.17) и (3.22) в системе с астатизмом ν -го порядка получим постоянную ошибку

$$e_{\text{уст}} = \frac{\nu!g_\nu}{K}, \quad (3.23)$$

а все первые ν членов задающего воздействия (3.16) будут иметь нулевую установившуюся ошибку.

Здесь рассматривалось свойство астатизма системы автоматического управления по отношению к задающему воздействию. Может идти речь и об астатизме системы по отношению к возмущающему воздействию. Если возмущающее воздействие $f(t)$ приложено в отличном от задающего $g(t)$ месте, то условие астатизма при этом будет другим.

Поскольку в этом случае отклонение регулируемой величины x обусловлено возмущающим воздействием, то надо будет пользоваться передаточной функцией замкнутой системы по возмущению $\Phi_f(s)$, которое имеет вид

$$\Phi_f(s) = \frac{R(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (3.24)$$

Действительно, пусть возмущение f подается в систему, как показано на рис. 3.5. Тогда справедливы равенства

$$X(s) = W(s)E(s) + W_2(s)F(s), \quad E(s) = G(s) - X(s), \quad (3.25)$$

где $W(s) = W_1(s)W_2(s)$, $E(s)$ и $F(s)$ – изображения переменных $e(t)$ и $f(t)$.

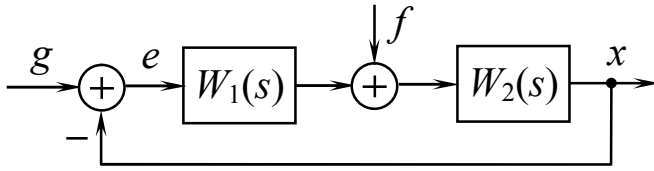


Рис. 3.5. Структурная модель системы с учетом возмущающего воздействия

Подставляя величину $X(s)$ из первого равенства (3.25) во второе и решая полученное при этом уравнение относительно изображения ошибки $E(s)$, получаем выражение

$$E(s) = \Phi_e(s)G(s) - \Phi_f(s)F(s), \quad (3.26)$$

где передаточная функция замкнутой системы для ошибки при обработке задающего воздействия $\Phi_e(s)$ определяется выражением (3.17), $\Phi_f(s)$ – передаточная функция замкнутой системы для возмущения, определяемая как

$$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}. \quad (3.27)$$

Полагая

$$W_1(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{L_1(s)}, \quad W_2(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{L_2(s)},$$

представляем равенство (3.27) в виде

$$\Phi_f(s) = \frac{K_2 L_1(s) N_2(s)}{L(s) + KN(s)},$$

где $L(s) = L_1(s)L_2(s)$, $N(s) = N_1(s)N_2(s)$, $K = K_1 K_2$. Сравнивая последнее равенство с (3.24), находим

$$R(s) = K_2 L_1(s) N_2(s). \quad (3.28)$$

Как видно, для астатизма системы по отношению к возмущающему воздействию потребуется выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\text{уст}}^{f(t)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{L(s) + KN(s)} \frac{f_0}{s} = -f_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{L(s) + KN(s)} = 0,$$

т. е. наличие нулевых корней в многочлене $R(s)$, а для этого согласно равенству (3.28) необходимо наличие нулевого полюса в передаточной функции $W_1(s)$, либо нулевого корня у многочлена $N_2(s)$ – числителя передаточной функции $W_2(s)$.

Точность при гармоническом воздействии. Установившиеся ошибки при гармоническом воздействии определяются частотными характеристиками замкнутой системы.

Основные частотные характеристики

$$A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|, \quad \varphi_3(\omega) = \arg \Phi(j\omega),$$

построенные по главной передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$, включают в себя всю информацию об установившемся слежении за синусоидальным задающим воздействием

$$g(t) = a_g \sin \omega t, \quad (3.29)$$

где a_g – амплитудное значение воздействия.

Поэтому, как показано на рис. 3.6, *a* и *б* (соответственно для систем с астатизмом и без него), установившаяся ошибка воспроизведения амплитуды гармонического задающего воздействия определится заштрихованными частями ординат. Заметим, что ошибка в амплитуде при $\omega = 0$ представляет собой статическую ошибку системы, так как нулевая частота соответствует постоянному входному сигналу ($g(t) = \text{const}$).

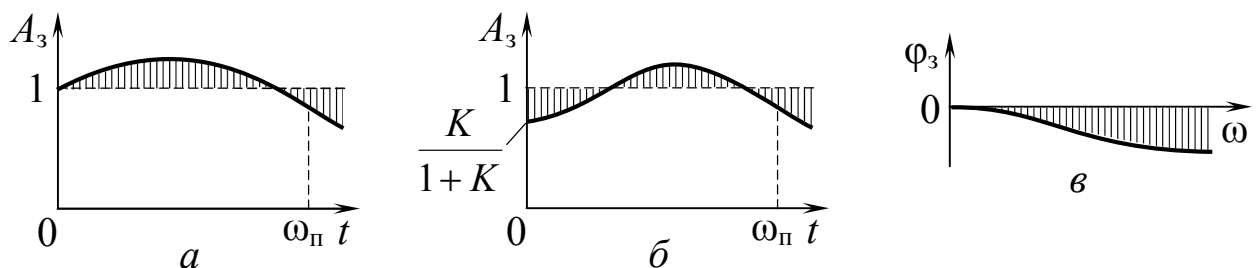


Рис. 3.6. Частотные характеристики замкнутой системы: астатической (*a*), статической (*б*); ФЧХ (*в*)

Фазовая частотная характеристика $\varphi_3(\omega)$ (рис. 3.6, *в*) позволяет определить установившуюся ошибку, представляющую собой сдвиг фазы выходного сигнала

$$x = A_3(\omega) \sin[\omega t + \varphi_3(\omega)] \quad (3.30)$$

по отношению к входному воздействию (3.29).

Амплитудная частотная характеристика $A_3(\omega)$ обычно падает при дальнейшем увеличении частоты, причем

$$A_3(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

В результате получается ограниченный диапазон частот $\omega_{\text{п}}$ (см. рис. 3.6), в котором ошибка воспроизведения амплитуды

$$\Delta A_3 = 1 - A_3(\omega)$$

не превышает допустимого значения. Этот диапазон частот $0 < \omega < \omega_{\text{п}}$ определяется **полосой пропускания** данной системы.

Полоса пропускания является важным показателем точности системы. Она характеризует ограничение возможностей системы в воспроизведении быстро меняющихся сигналов. Это связано со степенью инерционности системы. При необходимости для снижения инерционности в систему вводятся корректирующие устройства [3].

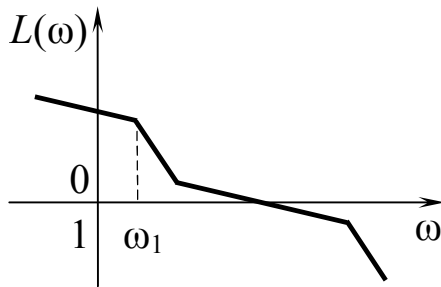


Рис. 3.7. ЛАЧХ астатической системы

Для астатических систем существует приближенная формула вычисления ошибки при гармоническом воздействии на рабочих частотах. Рабочие частоты систем управления лежат обычно ниже (левее) первой сопрягающей частоты ω_1 (рис. 3.7), где $|W(j\omega)| > 1$ и само значение ω сравнительно невелико. Поэтому для астатической системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{KN(s)}{s^v L_1(s)}, \quad (3.31)$$

где v — порядок (степень) астатизма, будем иметь

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{(j\omega)^v L_1(j\omega)} \approx \frac{K}{(j\omega)^v},$$

а для ошибки в замкнутой системе

$$\Phi_e(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)} \approx \frac{(j\omega)^v}{K},$$

т. е. при воздействии (3.29) амплитуда ошибки будет равна

$$A_e = |\Phi_e(j\omega)| a_g \approx \frac{\omega^v}{K} a_g. \quad (3.32)$$

Здесь наглядно видно, что и при гармоническом воздействии ошибка в первом приближении обратно пропорциональна общему коэффициенту усиления разомкнутой цепи (т. е. добротности), как это было в выражении (3.21).

Наконец, необходимо отметить, что часто при проектировании и испытании систем управления пользуются синусоидальным задающим сигналом и в том случае, когда в требо-

ваниях к системе указаны максимальная скорость и максимальное ускорение входного воздействия. Тогда определяют некоторый эквивалентный гармонический сигнал.

Если $g = a \sin \omega t$, скорость и ускорение будут

$$\dot{g} = a\omega \cos \omega t, \quad \ddot{g} = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Следовательно,

$$\dot{g}_{\max} = a\omega, \quad \ddot{g}_{\max} = a\omega^2.$$

Отсюда вычисляются частота ω и амплитуда a расчетного синусоидального задающего воздействия, при котором получаются требуемые максимальные скорость и ускорение, а именно:

$$\omega_3 = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}, \quad a_3 = \frac{\dot{g}_{\max}^2}{\ddot{g}_{\max}} = \frac{\dot{g}_{\max}}{\omega_3}. \quad (3.33)$$

Тогда эти значения ω_3 и a_3 принимаются за расчетные рабочие значения частоты и амплитуды для данной системы. Ошибка на этой частоте при данной амплитуде определится по формуле

$$A_e = a_3 |\Phi_e(j\omega)| = \left| \frac{a_3}{1+W(j\omega)} \right| \approx \frac{a_3}{|W(j\omega)|}. \quad (3.34)$$

Ниже мы воспользуемся этими соотношениями при решении задачи синтеза в процессе проектирования системы.

Установившаяся ошибка при произвольном воздействии (коэффициенты ошибок). В общем случае изображение ошибки $e(t)$ воспроизведения задающего воздействия $g(t)$ выражается формулой

$$E(s) = \Phi_e(s)G(s), \quad \Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)}.$$

Передаточную функцию можно (см. § 2.2) определить как преобразование Лапласа весовой функции

$$\Phi_e(s) = L\{\phi_e(t)\} = \int_0^{\infty} \phi_e(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (3.35)$$

где $\phi_e(t)$ – весовая функция для ошибки, т. е. реакция замкнутой системы в точке измерения ошибки (рассогласования) на мгновенный единичный импульс внешнего задающего воздействия $g(t) = \delta(t)$.

Величину установившейся ошибки при произвольной форме задающего воздействия можно записать в виде

$$e_{\text{уст}} = \int_0^t g(t-\tau)\phi_e(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g(t-\tau)\phi_e(\tau)d\tau. \quad (3.36)$$

Последнее выражение следует из того, что при $\tau > t$ аргумент функции $g(t-\tau)$ будет отрицательным, а при отрицательном значении $t-x$ принимается $g(t-\tau) = 0$. Поэтому замена конечного предела t бесконечным не меняет результата.

Разложим функцию от τ $g(t-\tau)$ в ряд в окрестности точки $\tau = 0$:

$$g(t-\tau) = g(t) - \tau g'(t) + \frac{\tau^2}{2} g''(t) - \dots + \frac{(-\tau)^i}{i!} g^{(i)}(t) + \dots$$

Подставив это выражение в равенство (3.36), получим

$$\begin{aligned} e_{\text{уст}} &= \int_0^{\infty} \left[g(t) - \tau g'(t) + \frac{\tau^2}{2} g''(t) - \dots + \frac{(-\tau)^i}{i!} g^{(i)}(t) + \dots \right] \phi_e(\tau) d\tau = \\ &= g(t) \int_0^{\infty} \phi_e(\tau) d\tau - g'(t) \int_0^{\infty} \tau \phi_e(\tau) d\tau + \frac{1}{2} g''(t) \int_0^{\infty} \tau^2 \phi_e(\tau) d\tau - \dots + \\ &\quad + \frac{1}{i!} g^{(i)}(t) \int_0^{\infty} (-\tau)^i \phi_e(\tau) d\tau + \dots \end{aligned}$$

Введя обозначение

$$c_i = \int_0^t (-\tau)^i \phi_e(\tau) d\tau, \quad (3.37)$$

где индекс i изменяется от 0 до ∞ , найдем

$$e_{\text{уст}} = c_0 g(t) + c_1 g'(t) + \frac{c_2}{2} g''(t) + \dots + \frac{c_i}{i!} g^{(i)}(t) + \dots \quad (3.38)$$

Дифференцируя равенство (3.35) i раз по s и сравнивая результат дифференцирования с равенством (3.37), получаем второе выражение для коэффициента c_i

$$c_i = \left[\frac{d^i \Phi_e}{ds^i} \right]_{s=0}. \quad (3.39)$$

Итак, установившаяся ошибка при произвольном задающем воздействии $g(t)$ определяется формулой (3.38), где коэффициенты c_i называются **коэффициентами ошибок**.

На практике ограничиваются небольшим конечным числом членов i .

Вычисление коэффициентов ошибок непосредственно по формулам (3.37) и (3.39) неудобно. Поэтому практически применяется другой способ, который вытекает из следующего рассуждения.

Разложим передаточную функцию $\Phi_e(s)$ в ряд

$$\Phi_e(s) = [\Phi_e(s)]_{s=0} + \left[\frac{d\Phi_e}{ds} \right]_{s=0} s + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\Phi_e}{ds^2} \right]_{s=0} s^2 + \dots + \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i\Phi_e}{ds^i} \right]_{s=0} s^i + \dots$$

Как видно, в этом разложении фигурируют выражения для коэффициентов ошибок c_i . Следовательно,

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2} s^2 + \dots + \frac{c_i}{i!} s^i + \dots \quad (3.40)$$

Но $\Phi_e(s)$ является отношением многочленов, т. е.

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{L(s)}{L(s)+KN(s)} \quad (3.41)$$

Очевидно, что произведя простое деление многочлена числителя (3.41) на многочлен знаменателя по известному алгебраическому правилу, мы и получим выражение типа (3.40), а значит, и значения всех коэффициентов ошибок. Перед делением многочлены числителя и знаменателя дроби (3.41) необходимо упорядочить по возрастающим степеням s .

После этого, подставив (3.40) в формулу

$$E(s) = \Phi_e(s)G(s)$$

и переходя к оригиналам, получим выражение (3.38).

Пример 3.1. Для системы с астатизмом первого порядка, схема которой дана на рис. 3.8, имеем

$$W(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

где $K = K_1K_2K_3$.

Следовательно,

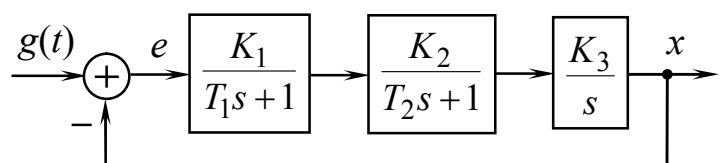


Рис. 3.8. Следящая система с астатизмом первого порядка

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K}$$

Разделив числитель на знаменатель, получаем

$$\begin{array}{l} s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3 \\ - s + \frac{1}{K}s^2 + \frac{T_1 + T_2}{K}s^3 + \frac{T_1 T_2}{K}s^4 \\ \hline \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)s^2 + \left(T_1 T_2 - \frac{T_1 + T_2}{K}\right)s^3 - \frac{T_1 T_2}{K}s^4 \\ - \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)s^2 + \frac{1}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)s^3 + \\ + \frac{T_1 + T_2}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)s^4 + \frac{T_1 T_2}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K^2}\right)s^5 \\ \hline \left(T_1 T_2 - 2\frac{T_1 + T_2}{K} + \frac{1}{K^2}\right)s^3 + \left[-\frac{T_1 T_2 + (T_1 + T_2)^2}{K} + \frac{T_1 + T_2}{K}\right]s^4 - \\ - \frac{T_1 T_2}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)s^5 \end{array} \left| \begin{array}{l} K + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3 \\ \hline \frac{1}{K}s + \left(\frac{T_1 + T_2}{K} - \frac{1}{K^2}\right)s^2 + \\ + \left(\frac{T_1 T_2}{K} - 2\frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^3}\right)s^3 + \dots \end{array} \right.$$

Таким образом,

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{K}s + \left(\frac{T_1 + T_2}{K} - \frac{1}{K^2}\right)s^2 + \left(\frac{T_1 T_2}{K} - 2\frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^3}\right)s^3 + \dots$$

Сравнивая это равенство с (3.40), находим коэффициенты ошибок

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{K}, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{K} - \frac{1}{K^2}, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_1 T_2}{K} - 2\frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^3}, \quad \dots$$

Из примера видно, что коэффициент c_0 соответствует статической, а c_1 – скоростной ошибкам.

Важно отметить, что при произвольном внешнем воздействии в формулах для ошибок общий коэффициент усиления разомкнутой цепи K (добротность) влечет за собой уменьшение всех видов установившихся ошибок замкнутой системы. Это главный фактор повышения точности замкнутой системы автоматического управления.

Необходимо заметить, что вычисление установившихся ошибок по указанным формулам имеет практический смысл при достаточно медленном изменении внешнего воздействия. Иначе

эта ошибка не будет реальной из-за наличия значительной переходной составляющей процесса.

Отметим также, что выше определялись коэффициенты ошибок по задающему воздействию. Аналогично это можно сделать и по возмущающим воздействиям, привлекая соответствующие передаточные функции.

Другой способ определения коэффициентов ошибок сводится к следующему [6]. Запишем тождество

$$\Phi_e(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k s^k,$$

где согласно выражению (3.40) имеем

$$C_k = \frac{c_k}{k!}. \quad (3.42)$$

Умножая левую и правую части тождества на знаменатель дроби, преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} & b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_0 s^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_1 s^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_2 s^{k+2} + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_n s^{k+n}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s слева и справа последнего тождества, получим уравнения относительно коэффициентов C_k

$$b_0 = C_0 a_0,$$

$$b_1 = C_1 a_0 + C_0 a_1,$$

$$b_2 = C_2 a_0 + C_1 a_1 + C_0 a_2,$$

...

$$b_m = C_m a_0 + C_{m-1} a_1 + \dots + C_0 a_m,$$

$$0 = C_{m+1} a_0 + C_m a_1 + \dots + C_0 a_{m+1}$$

и т. д. Из этих уравнений следуют выражения

$$C_0 = \frac{b_0}{a_0},$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{a_0}(b_1 - C_0 a_1), \\
C_2 &= \frac{1}{a_0}(b_2 - C_1 a_1 - C_0 a_2), \\
&\dots \\
C_m &= \frac{1}{a_0}(b_m - C_{m-1} a_1 - \dots - C_0 a_m)
\end{aligned}$$

и общая рекуррентная формула

$$C_k = \frac{1}{a_0} \left(b_k - \sum_{r=1}^k C_{k-r} a_r \right), \quad (3.43)$$

где $b_k \equiv 0$ при $k > m$; $a_r \equiv 0$ при $r > n$.

Пример 3.2. Найти первые несколько коэффициентов ошибок для системы, представленной на рис. 3.8, по формуле (3.43).

Учитывая, что $m = n = 3$; $a_0 = K$; $a_1 = 1$; $a_2 = T_1 + T_2$; $a_3 = T_1 T_2$; $b_0 = 0$; $b_1 = 1$; $b_2 = T_1 + T_2$; $b_3 = T_1 T_2$, по формуле (3.43) получим

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{b_0}{a_0} = 0; \quad C_1 = \frac{1}{a_0}(b_1 - C_0 a_1) = \frac{1}{K}; \\
C_2 &= \frac{1}{a_0}(b_2 - C_1 a_1 - C_0 a_2) = \frac{1}{K} \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K} \right), \\
C_3 &= \frac{1}{a_0}(b_3 - C_2 a_1 - C_1 a_2 - C_0 a_3) = \frac{1}{K} \left[T_1 T_2 - \frac{1}{K} \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K} \right) - \frac{T_1 + T_2}{K} \right] = \\
&= \frac{T_1 T_2}{K} - 2 \frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^3}, \\
C_4 &= \frac{1}{a_0} \left(0 - \sum_{r=1}^4 C_{4-r} a_r \right) = -\frac{1}{a_0} (C_3 a_1 + C_2 a_2 + C_1 a_3) = \\
&= -\frac{1}{K} \left[\frac{T_1 T_2}{K} - 2 \frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^3} + \frac{1}{K} \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K} \right) (T_1 + T_2) + \frac{T_1 T_2}{K} \right] = \\
&= -2 \frac{T_1 T_2}{K^2} + 3 \frac{T_1 + T_2}{K^3} - \frac{(T_1 + T_2)^2}{K^2} - \frac{1}{K^4}
\end{aligned}$$

и т. д.

С учетом равенства (3.42) результаты этого и предыдущего примеров совпадают.

3.4. Анализ устойчивости линеаризованных моделей систем управления [1]

Устойчивость систем автоматического управления является одним из важнейших условий ее работоспособности, так как устойчивость включает в себя требование затухания переходных процессов во времени. Очевидно, что система с расходящимся процессом была бы неработоспособной.

Все реальные системы в технике и в природе, как правило, являются в большей или меньшей степени нелинейными. Всегда существует много факторов, отклоняющих реальные характеристики от прямолинейных. Однако многие системы можно считать близкими к линейным и с необходимой для практики точностью проектировать как линейные. Для этого производится линеаризация характеристик и уравнения для реальных звеньев системы (см. § 2.1).

Дифференциальные уравнения линеаризованной системы называются *уравнениями первого приближения* [1]. Во многих случаях устойчивость системы исследуют по этим уравнениям. Однако на основании уравнений первого приближения можно дать иногда неверное заключение об устойчивости движения. Поэтому, естественно, возникает вопрос об определении условий, при выполнении которых по уравнениям первого приближения можно дать правильные ответы об устойчивости движения. Эту исключительно важную и принципиальную для теории автоматического управления задачу впервые поставил и решил А. М. Ляпунов.

Пусть уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.44)$$

где x_i – переменные состояния системы.

Системе уравнений (3.44) соответствует характеристическое уравнение, которое можно записать следующим образом:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.45)$$

Из (3.45) можно найти его корни λ_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, которые в общем случае имеют вид $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$, где α_i и ω_i – вещественные и мнимые части корней соответственно.

Для исследования устойчивости систем по их линеаризованным уравнениям принципиально важны следующие теоремы А. М. Ляпунова, которые приведем без доказательства [1].

Теорема 1. *Если вещественные части всех корней λ_i характеристического уравнения (3.45) первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Если среди корней λ_i характеристического уравнения (3.45) первого приближения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Если среди корней характеристического уравнения имеется один или несколько нулевых корней, а вещественные части остальных корней отрицательны, то этот случай называют **критическим**. Как показал Ляпунов, в критическом случае устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения не может быть оценена по уравнениям первого приближения и поэтому в этом случае требуется рассмотрение дифференциальных уравнений возмущенного движения в их исходном виде.

Теоремы Ляпунова имеют весьма важное значение, так как они позволяют судить об устойчивости нелинейных систем по их линеаризованным уравнениям (уравнениям первого приближения).

Далее под линейной системой будем понимать линеаризованную систему. Систему n уравнений первого порядка (3.44) можно преобразовать в одно уравнение n -го порядка относительно регулируемой (выходной) величины $x(t)$, которое при наличии управляющего воздействия $g(t)$ имеет вид

$$(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) x_B(t) = (b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) g(t), \quad (3.46)$$

где $p = d/dt$.

Слагаемое $x_{св}(t)$ в (3.1) – свободная (переходная) составляющая, которая определяется общим решением однородного дифференциального уравнения без правой части:

$$(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) x_B(t) = 0. \quad (3.47)$$

Обычно в теории автоматического управления интересуются устойчивостью вынужденной составляющей $x_B(t)$ переходного процесса. Тогда за невозмущенное движение системы необходимо принять вынужденную составляющую переходного процесса $x_B(t)$. Возмущенным движением будет любое возможное в системе изменение регулируемой величины $x(t)$, а отклонением или вариацией – свободная составляющая $x_B(t) = x(t) - x_{св}(t)$.

Возмущениями, по А. М. Ляпунову, являются начальные значения $x_{св}$, которые возникли в момент $t = t_0$ под действием внезапно подействовавших дополнительных внешних сил, т. е. начальные значения $x_{св0}$. Дифференциальными уравнениями возмущенного движения первого приближения в данном случае будут уравнения (3.47).

В соответствии с определением устойчивости по А. М. Ляпунову система будет асимптотически устойчивой, если с течением времени при $t \rightarrow \infty$ свободная составляющая будет стремиться к нулю, т. е. $x_{св}(t) \rightarrow 0$. Чтобы найти эту составляющую, необходимо решить дифференциальное уравнение (3.47).

Решение уравнения (3.47) находят как $x_{св}(t) = C e^{\lambda t}$. Дифференцируя это выражение n раз и подставляя в (3.47), после сокращения на общий множитель $C e^{\lambda t}$ получаем

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.48)$$

Полученное алгебраическое уравнение (3.48) называют **характеристическим уравнением**, оно совпадает с (3.45). Его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ будут определять характер переходного процесса в системе. Каждому корню λ_i характеристического уравнения (3.48) соответствует свое решение вида $C_i e^{\lambda_i t}$ однородного уравнения (3.47). Нетрудно заметить, что по своему виду левая часть уравнения (3.48) совпадает с дифференциальным оператором при выходной величине в уравнении (3.47), поэтому характеристическое уравнение получают обычно, приравнявая

к нулю дифференциальный оператор при выходной величине в исходном дифференциальном уравнении (3.47), т. е.

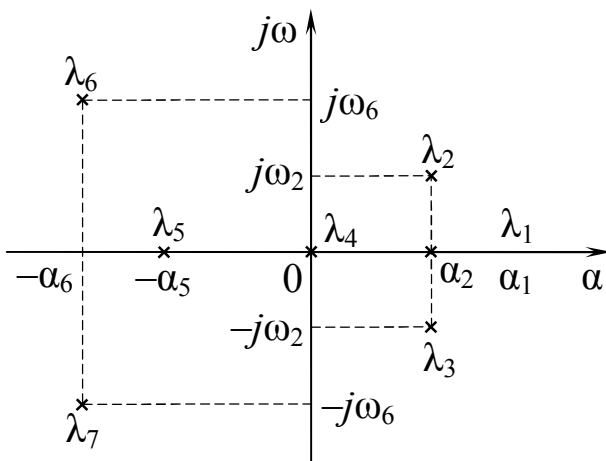
$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.49)$$

Следует заметить, однако, что в характеристическом уравнении (3.49), $p = \lambda$ означает уже не оператор дифференцирования, а некоторое комплексное число.

Решение характеристического уравнения степени n содержит n корней. Корни характеристического уравнения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами могут быть вещественными, комплексными попарно сопряженными, мнимыми попарно сопряженными, нулевыми. В общем случае

$$\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i. \quad (3.50)$$

На рис. 3.9 показаны возможные положения корней на комплексной плоскости корней λ при



$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1; & \lambda_2 &= \alpha_2 + j\omega_2; \\ \lambda_3 &= \alpha_2 - j\omega_2; & \lambda_4 &= 0; \\ \lambda_5 &= -\alpha_5; & \lambda_6 &= -\alpha_6 + j\omega_6; \\ \lambda_7 &= -\alpha_6 - j\omega_6. \end{aligned}$$

Если все корни разные, то их называют простыми. Если среди корней есть одинаковые, то их называют кратными.

Обычно корни с отрицательными вещественными частями принято называть **левыми**, поскольку они в комплексной плоскости корней расположены слева от мнимой оси, а корни с положительными вещественными частями – **правыми корнями**.

Рис. 3.9. Возможные положения корней характеристического уравнения

Общее решение однородного уравнения (3.47) в случае, когда все корни характеристического уравнения (3.48) простые, имеет вид (3.2), а при наличии кратных корней – вид (3.3).

Условие устойчивости линейной системы формулируется следующим образом: для того чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (3.48) были левыми.

Заметим, что корни характеристического уравнения λ_i зависят только от вида левой части дифференциального уравнения (3.46) линейной системы. Постоянные интегрирования C_i зависят и от вида правой ее части, поэтому быстрота затухания и форма переходного процесса определяются как левой, так и правой частями исходного дифференциального уравнения (3.46). Однако, поскольку в понятие устойчивости входит только факт наличия или отсутствия затухания переходного процесса, устойчивость линейной системы не зависит от вида правой части дифференциального уравнения (3.46) и определяется только характеристическим уравнением (3.48).

Очевидно, что отрицательным (левым) корням $\alpha_i < 0$ соответствуют затухающие экспоненты (рис. 3.10, а), положительным (правым) корням $\alpha_i > 0$ – возрастающие экспоненты (рис. 3.10, б) и при нулевых корнях $\alpha_i = 0$ слагаемые представляют собой прямые, параллельные оси времени (рис. 3.10, в).

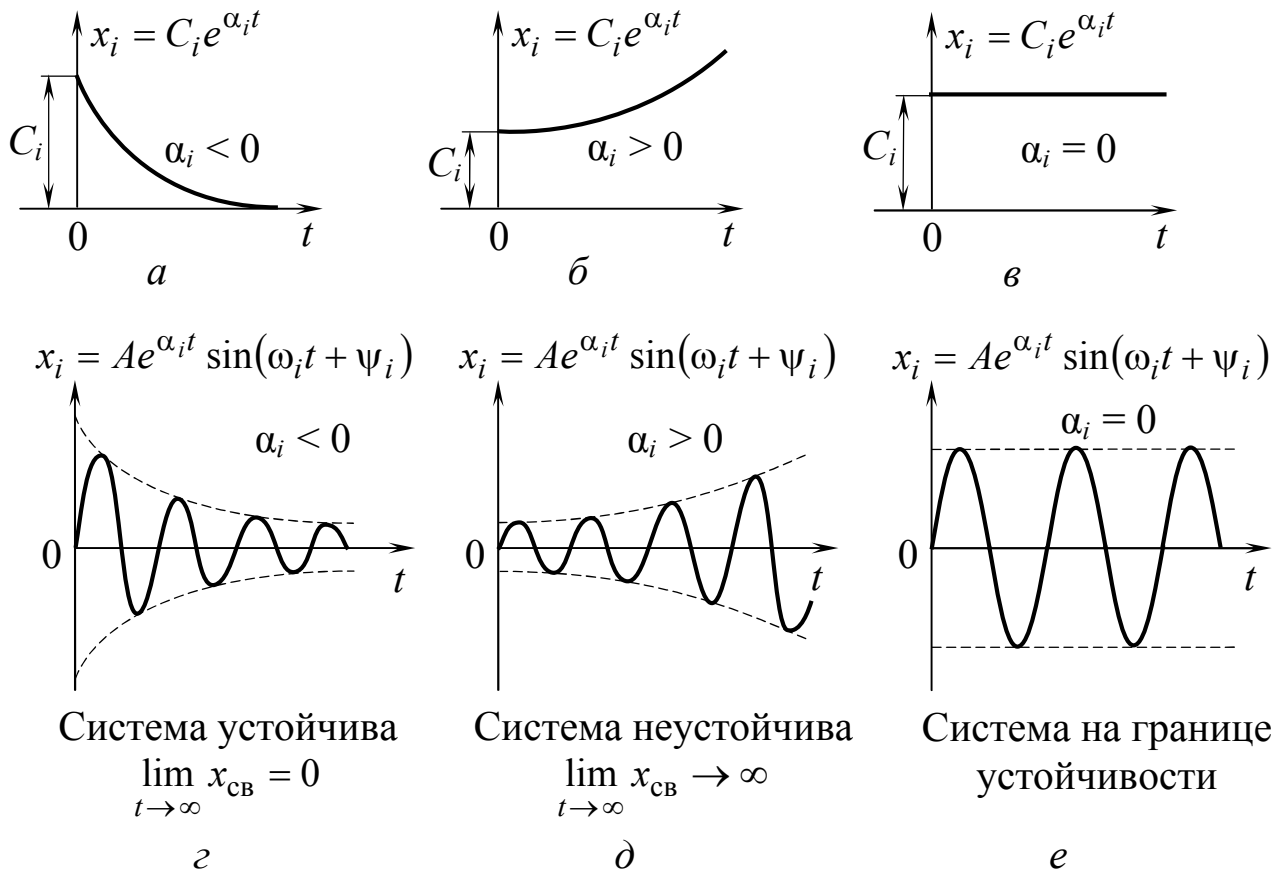


Рис. 3.10. Кривые изменения составляющих свободного процесса (3.1) при различных значениях корней характеристического уравнения

Комплексные корни характеристического уравнения всегда бывают попарно сопряженными: $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ и $\lambda_{i+1} = \alpha_i - j\omega_i$.

Слагаемые, определяемые этими корнями в (3.2), могут быть при использовании известной формулы Эйлера

$$e^{\pm j\omega_i t} = \cos \omega_i t \pm j \sin \omega_i t$$

представлены в виде

$$C_i e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i - j\omega_i)t} = A e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \psi_i),$$

где A_i и ψ_i – новые постоянные.

В этом случае при $\alpha_i < 0$ получаются затухающие колебания (рис. 3.10, *з*), при $\alpha_i > 0$ – расходящиеся колебания (рис. 3.10, *д*) и при $\alpha_i = 0$ – незатухающие колебания (рис. 3.10, *е*). Для устойчивости и в этом случае необходимо выполнение условия $\alpha_i < 0$.

В самом общем случае среди корней характеристического уравнения (3.48) могут быть кратные корни. Если l_i – кратность корня λ_i , то в (3.3) появятся слагаемые вида

$$P_i(t) e^{\lambda_i t},$$

где $P_i(t) = C_i + C_{i+1}t + \dots + C_{i+l_i-1}t^{l_i-1}$.

Если корень $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$ имеет отрицательную вещественную часть $\alpha_i < 0$, то множитель $e^{\lambda_i t}$ будет с течением времени убывать. Множитель $P_i(t)$ неограниченно растет, поэтому мы имеем неопределенность $\infty \cdot 0$. Однако известно, что $e^{-|\alpha_i|t}$ быстрее стремится к нулю, чем выражение $C_{i+l_i-1}t^{l_i-1}$, поэтому при $\alpha_i < 0$ эта группа слагаемых с течением времени также стремится к нулю.

Таким образом, видно, что в самом общем случае для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (3.48) были левыми.

В настоящее время в связи с большими возможностями современной вычислительной техники и широким ее распространением не представляет трудностей построение эффективных алгоритмов анализа устойчивости, основанных на непосредственном вычислении корней характеристического уравнения (3.48) на ЭВМ.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

40. Что понимается под анализом системы управления? Каковы основные задачи анализа?
41. Каковы основные требования, предъявляемые к системам управления?
42. Что понимается под устойчивостью системы управления?
43. Что такое инвариантность и ковариантность системы управления?
44. Как в общем виде определяется установившаяся ошибка воспроизведения задающего сигнала (ошибки регулирования)?
45. Что такое чувствительность системы управления?
46. Как определяются абсолютная и относительная чувствительности передаточной функции системы и к вариациям передаточной функции звена?
47. Как определяется чувствительность систем с типовыми структурами?
48. Что называется статической и скоростной ошибками систем управления?
49. Что такое статическая и астатическая системы управления?
50. Что такое порядок (степень) астатизма?
51. Как определяется ошибка регулирования при гармоническом воздействии?
52. Как определяется эквивалентное гармоническое воздействие при известных максимальных скорости и ускорения задающего воздействия?
53. Что такое коэффициенты ошибок системы?
54. Как практически определяются коэффициенты ошибок?
55. Что называются уравнениями первого приближения системы?
56. Как формулируются теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по уравнениям первого приближения?
57. Что такое характеристическое уравнение системы? Какие его корни называются левыми и правыми?

58. Как формулируется условие асимптотической устойчивости линейной системы?

ГЛАВА 4. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Важное значение имеют правила, которые позволяют определить устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют *критериями устойчивости*. С помощью критериев устойчивости можно не только установить, устойчива система или нет, но и выяснить, как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе.

Критерии устойчивости могут быть разделены на *алгебраические* и *частотные*. С математической точки зрения все критерии устойчивости эквивалентны, однако целесообразный выбор того или иного критерия устойчивости при решении конкретных задач позволяет провести исследование устойчивости наиболее простым путем.

4.1. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.1)$$

Прежде всего заметим, что необходимым условием устойчивости системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (4.1):

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad \dots; \quad a_n > 0. \quad (4.2)$$

Действительно, в соответствии с теоремой Безу уравнение (4.1) можно представить в виде произведения множителей, содержащих корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$a_0 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0. \quad (4.3)$$

Пусть все корни его имеют отрицательные вещественные части

$$\lambda_1 = -|\alpha_1|, \quad \lambda_{2,3} = -|\alpha_2| \pm j\omega_2, \quad \dots, \quad \lambda_n = -|\alpha_n|.$$

Подставив их в уравнение (4.3), получим

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_1| - j\omega_2)(\lambda + |\alpha_1| + j\omega_2)\dots(\lambda + |\alpha_n|) = 0.$$

Поскольку средние два сомножителя дают

$$[(\lambda + |\alpha_1|)^2 + \omega^2],$$

то видно, что после перемножения всех скобок получим в уравнении только положительные коэффициенты. Это и требовалось доказать.

Однако в общем случае положительность коэффициентов уравнения недостаточна для устойчивости системы. В самом деле, положительные коэффициенты уравнения могут получиться и при положительных вещественных частях комплексных корней. Но все вещественные корни при положительных коэффициентах уравнения будут обязательно отрицательными.

Только в частных случаях, когда имеется уравнение первой или второй степени, положительность коэффициентов является необходимым и достаточным условием устойчивости (это легко проверить). А при $n \geq 3$ это условие лишь необходимо, но недостаточно, ибо оно обеспечивает отрицательность только вещественных корней.

Из алгебраических критериев устойчивости наиболее широкое распространение получили критерии устойчивости Рауса и Гурвица.

Приведем теперь *критерий устойчивости Гурвица* без доказательства. Он формулируется следующим образом.

Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы были положительными n главных определителей следующей матрицы коэффициентов характеристического уравнения (4.1) данной системы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad (a_0 > 0). \quad (4.4)$$

По главной диагонали матрицы слева направо записывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индек-

сами. На место коэффициентов с индексами больше n (n – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули. Указанные главные определители имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (4.5)$$

Они называются *определителями Гурвица*.

Последний определитель Гурвица, как видно из приведенной выше матрицы, равен

$$\Delta_1 = \Delta_{n-1} a_n.$$

Поэтому его положительность при $\Delta_{n-1} > 0$ сводится к условию $a_n > 0$.

Наиболее важным, как увидим далее, является предпоследний определитель Гурвица Δ_{n-1} .

Для систем первого и второго порядка критерий Гурвица сводится просто к положительности коэффициентов a_0, a_1, a_2 . Для системы третьего порядка характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

а условие устойчивости по Гурвицу будет

$$\Delta_{n-1} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (n = 3), \quad (4.6)$$

причем остальные неравенства сводятся к требованию положительности коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 . Условие (4.6) записывается еще в виде

$$a_1 a_2 > a_0 a_3 \quad (4.7)$$

(произведение средних коэффициентов уравнения должно быть больше произведения крайних).

Аналогично для системы четвертого порядка

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

условием устойчивости по Гурвицу будет положительность всех коэффициентов характеристического уравнения и выполнение неравенства

$$\Delta_{n-1} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0 \quad (n = 4). \quad (4.8)$$

Для устойчивости систем пятого и шестого порядков требуется, кроме положительности коэффициентов, выполнение двух неравенств типа (4.6), (4.8). Для систем седьмого и восьмого

порядков – трех неравенств и т. д. Сложность этих неравенств быстро возрастает с увеличением порядка системы n .

Поэтому для общих исследований особенно удобен критерий Гурвица при $n \leq 4$. Но при числовом задании всех коэффициентов легко проверить устойчивость системы, конечно, и при любом n .

Пример 4.1. Рассмотрим устойчивость системы, изображенной на рис. 3.8. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$T_1T_2\lambda^3 + (T_1+T_2)\lambda^2 + \lambda + K = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения $a_0 = T_1T_2$, $a_1 = T_1+T_2$, $a_2 = 1$, $a_3 = K$ положительны.

Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1+T_2 & K & 0 \\ T_1T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_1+T_2 & K \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости по критерию Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 = T_1 + T_2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad a_3 = K > 0.$$

Первое и третье из этих условий в связи положительностью коэффициентов характеристического уравнения заведомо выполняется и необходимо рассматривать только второе условие. Из этого условия получаем

$$a_1a_2 - a_0a_3 = T_1 + T_2 - KT_1T_2 > 0,$$

отсюда следует

$$K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2},$$

т. е. условие устойчивости налагает ограничение на коэффициент усиления разомкнутой системы K .

4.2. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими и получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем

высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность.

Принцип аргумента. В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из известного в теории функций комплексного переменного принципа аргумента, который кратко излагается ниже.

Пусть дан некоторый полином n -й степени

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n.$$

Этот полином в соответствии с теоремой Безу можно представить в виде $D(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)$, где $s_i = a_i + j\omega_i$ – корни уравнения $D(s) = 0$.

На комплексной плоскости s каждый корень геометрически может быть изображен вектором, проведенным из начала координат к точке s_i (рис. 4.1, а). Длина этого вектора равна модулю комплексного числа s_i , т. е. $|s_i|$, а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси, – аргументу или фазе комплексного числа s_i , т. е. $\arg s_i$.

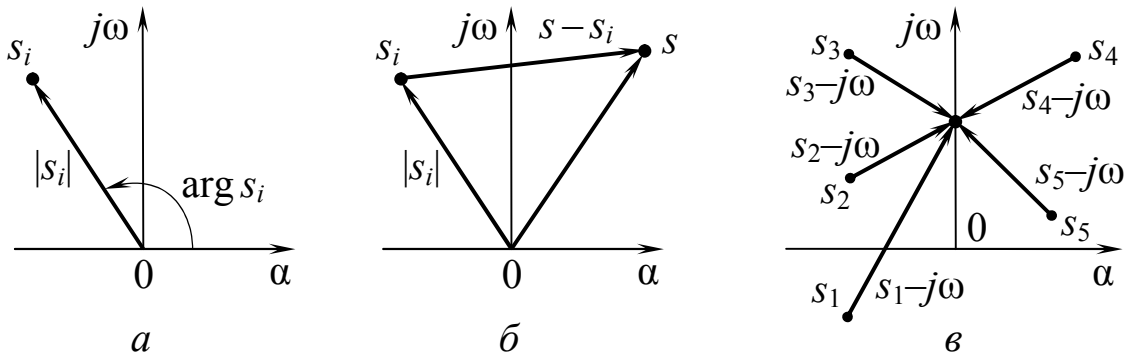


Рис. 4.1. К обоснованию принципа аргумента: изображение корня многочлена в виде вектора (а); изображение величины $s - s_i$ в виде вектора (б); изображение величин $j\omega - s_i$ (в)

Величины $(s - s_i)$ геометрически изображаются векторами, проведенными из точки s_i к произвольной точке s (рис. 4.1, б). В частном случае при $s = j\omega$ получим

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\dots(j\omega - s_n). \quad (4.9)$$

Концы элементарных векторов $(j\omega - s_i)$ будут находиться на мнимой оси в точке $s = j\omega$ (рис. 4.1, в).

В выражении (4.9) $D(j\omega)$ представляет собой вектор, равный произведению элементарных векторов $(j\omega - s_i)$ и действительного числа a_0 .

Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов и a_0 :

$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - s_1| |j\omega - s_2| \dots |j\omega - s_n|, \quad (4.10)$$

а аргумент его равен сумме аргументов элементарных векторов:

$$\begin{aligned} \arg D(j\omega) = \arg D(j\omega - s_1) + \arg D(j\omega - s_2) + \\ + \dots + \arg D(j\omega - s_n). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Условимся считать вращение против часовой стрелки положительным. Тогда при изменении ω от $-\infty$ до ∞ каждый элементарный вектор повернется на угол π , если его начало, т. е. корень s_i , расположено слева от мнимой оси, и на угол $-\pi$, если корень расположен справа от мнимой оси (рис. 4.2).

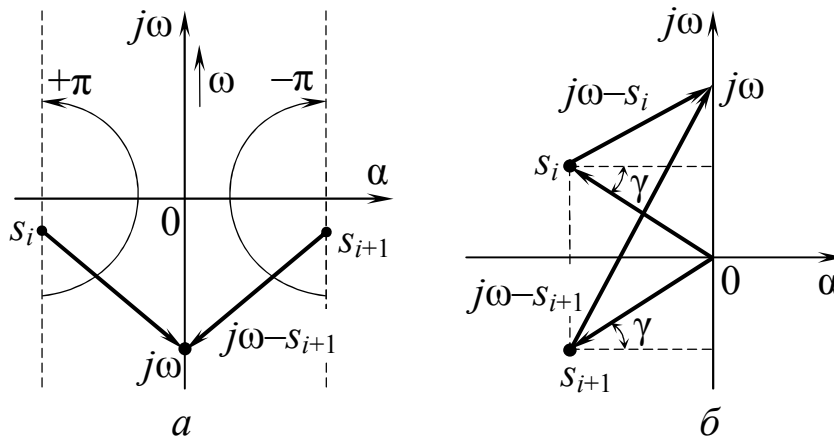


Рис. 4.2. Иллюстрация углов поворота векторов $j\omega - s_i$ и $j\omega - s_{i+1}$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ в случае, когда корень s_i располагается слева, а корень s_{i+1} справа от мнимой оси (а), а также когда s_i и s_{i+1} – пара комплексно сопряженных корней (б)

Предположим, что полином $D(s)$ имеет m правых корней и $n - m$ левых.

Тогда при изменении ω от $-\infty$ до ∞ изменение (приращение) аргумента вектора $D(j\omega)$, равное сумме углов поворота векторов $(j\omega - s_i)$, равно

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (4.12)$$

Отсюда вытекает следующее правило: *изменение (приращение) аргумента $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до ∞ равно разности между числом левых и правых корней уравнения $D(s) = 0$, умноженной на π .*

Очевидно, что при изменении частоты ω от 0 до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ будет вдвое меньше:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (\pi/2)(n - 2m). \quad (4.13)$$

Каждый из векторов $(j\omega - s_i)$, соответствующих вещественным корням, повернется теперь на угол $\pi/2$ или $-\pi/2$.

Векторы $[j\omega - (\alpha_i + j\omega_i)]$, $[j\omega - (\alpha_i - j\omega_i)]$, которые составляют пару, соответствующую, например, двум комплексно-сопряженным корням, повернутся: один – на угол $\pi/2 + \gamma$, а другой – на $\pi/2 - \gamma$, где γ – угол, образованный вектором, проведенным от корня в начало координат, с осью абсцисс (рис. 4.2). Общее приращение аргумента произведения этих векторов при изменении ω от 0 до ∞ равно

$$\pi/2 + \gamma + \pi/2 - \gamma = \pi.$$

В основу всех частотных критериев устойчивости положено уравнение (4.12), определяющее приращение аргумента $D(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ , или (4.13) – при изменении ω от 0 до ∞ .

Критерий устойчивости Михайлова. Этот критерий устойчивости, сформулированный в 1938 г. советским ученым А.В. Михайловым, является, по существу, геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы на основании рассмотрения некоторой кривой, называемой кривой Михайлова.

Пусть дано характеристическое уравнение системы (4.1). Левую часть характеристического уравнения называют характеристическим полиномом

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4.14)$$

Если подставить в этот полином чисто мнимое значение $\lambda = j\omega$, то получим комплексный полином

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = \\ &= X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \\ Y(\omega) &= \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \dots) \end{aligned} \quad (4.16)$$

называют соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова; функции $D(\omega)$ и $\psi(\omega)$ представляют собой *модуль* и *фазу (аргумент)* вектора $D(j\omega)$.

При изменении частоты ω вектор $D(j\omega)$, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую *кривой (годографом) Михайлова*.

В соответствии с (4.13) угол поворота вектора $D(j\omega)$ вокруг начала координат при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} (n - 2m).$$

Отсюда определяем число правых корней полинома $D(s)$, т. е.

$$m = \frac{\pi n / 2 - \Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{2}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) видно, что число правых корней m будет равно нулю при одном-единственном условии

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n \frac{\pi}{2}. \quad (4.18)$$

Условие (4.18) является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения были левыми; иначе говоря, среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой оси и обращающих в нуль комплексный полином $D(j\omega)$, т. е. должно выполняться еще одно условие

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (4.19)$$

Формулы (4.18) и (4.19) представляют математическое выражение критерия устойчивости Михайлова: *для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $\pi/2$, где n – порядок характеристического уравнения.*

Заметим, что для устойчивых систем кривая Михайлова начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, поскольку при $a_0 > 0$ все коэффициенты характеристического уравнения положительны и $D(0) = a_n > 0$. Кроме того, для устойчивых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, фаза (аргумент) $\psi(\omega)$ с ростом частоты ω должна возрастать монотонно, т. е.

вектор $D(j\omega)$ должен поворачиваться только против часовой стрелки, поскольку с ростом частоты монотонно возрастают имеющие одинаковые (положительные) знаки фазы элементарных векторов $(j\omega - s_i)$, являющиеся слагаемыми фазы вектора $D(j\omega)$ (см. (4.11)).

Учитывая сказанное выше, критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать так: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.

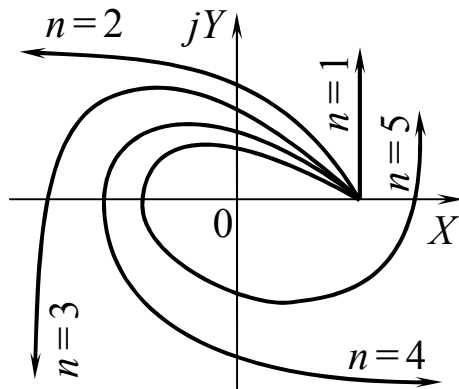


Рис. 4.3. Типичные кривые Михайлова для устойчивых систем

На рис. 4.3 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем, описываемых уравнениями, начиная от первого ($n = 1$) и кончая пятым ($n = 5$) порядком. Для удобства сравнения коэффициенты a_n во всех случаях приняты одинаковыми.

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости, вследствие чего угол поворота вектора $D(j\omega)$ оказывается меньше, чем $\pi n/2$. Число правых корней неустойчивой системы можно определить по формуле (4.17).

На рис. 4.4 показаны кривые Михайлова для неустойчивых и нейтральных систем. Рис. 4.4, а – при $\omega = 0$ кривая Михайлова начинается на отрицательной вещественной полуоси; система неустойчива. Рис. 4.4, б – порядок уравнения $n = 5$, а кривая Михайлова находится вся в одном квадранте (этому соответствует характеристическое уравнение $D(s) = a_0s^5 + a_1s^4 + a_2 = 0$); система

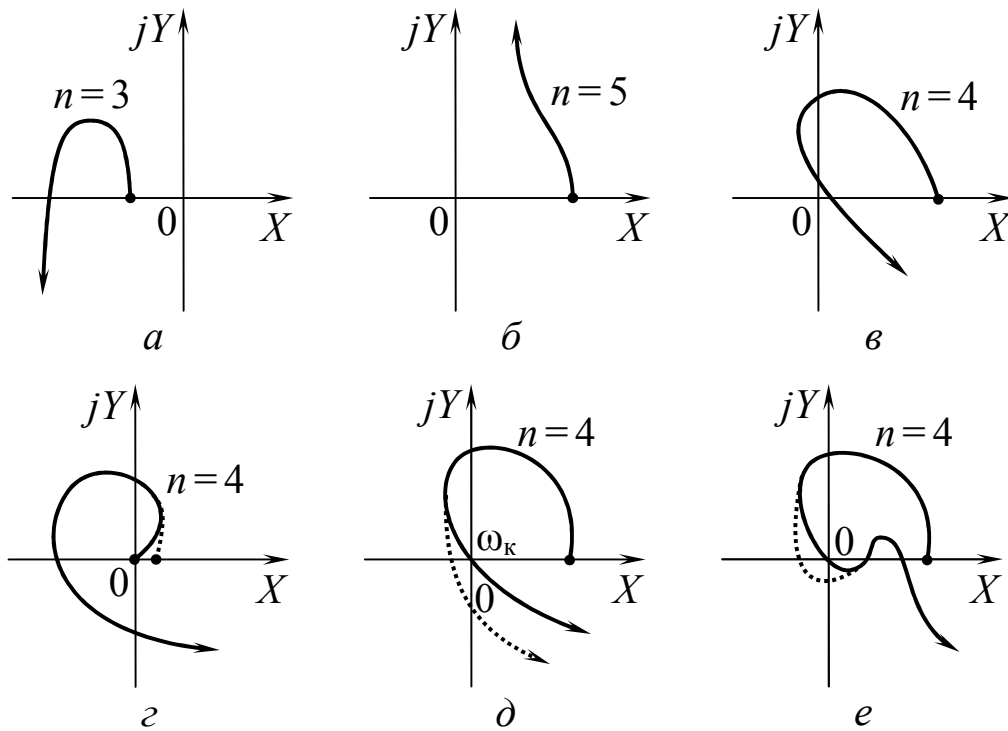


Рис. 4.4. Кривые Михайлова для неустойчивых и нейтральных систем

неустойчива. Рис. 4.4, в – нарушена последовательность прохождения квадрантов; система неустойчива. Рис. 4.4, г – кривая Михайлова начинается в начале координат, т. е. в характеристическом уравнении имеется по крайней мере один нулевой корень; система находится на границе апериодической устойчивости; небольшая деформация кривой Михайлова (прерывистая линия) делает систему устойчивой. Рис. 4.4, д – кривая Михайлова проходит при некотором значении частоты ω_k через начало координат, т. е. в характеристическом уравнении имеются чисто мнимые корни $\pm j\omega_k$ система находится на границе колебательной устойчивости; небольшая деформация кривой Михайлова делает систему устойчивой (прерывистая линия). Рис. 4.4, е – кривая Михайлова проходит через начало координат, но небольшой деформацией кривой Михайлова удовлетворить условиям устойчивости нельзя; система неустойчива.

Построение кривой Михайлова практически производится либо по точкам, либо методом вспомогательных годографов. Первый метод сводится к определению ряда точек кривой Михайлова, соответствующих фиксированным значениям частоты ω , включая (обязательно) частоты точек пересечения кривой с осями координат, которые находятся как корни уравнений

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 0, \\ Y(\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

При втором методе предварительно определяют годографы отдельных звеньев системы и по ним строят искомую кривую Михайлова, применяя правила умножения и сложения векторов.

Анализируя годографы Михайлова, можно установить следующее следствие из критерия устойчивости Михайлова. При последовательном прохождении кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости вещественная и мнимая оси пересекаются ею поочередно. В точках пересечения кривой Михайлова с вещественной осью обращается в нуль мнимая функция Михайлова $Y(\omega)$, а в точках пересечения кривой с мнимой осью обращается в нуль вещественная функция $X(\omega)$. Поэтому значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, должны являться корнями уравнений (4.20).

Вещественную $X(\omega)$ и мнимую $Y(\omega)$ функции Михайлова можно представить графически в виде кривых (рис. 4.5). Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс дают значения корней

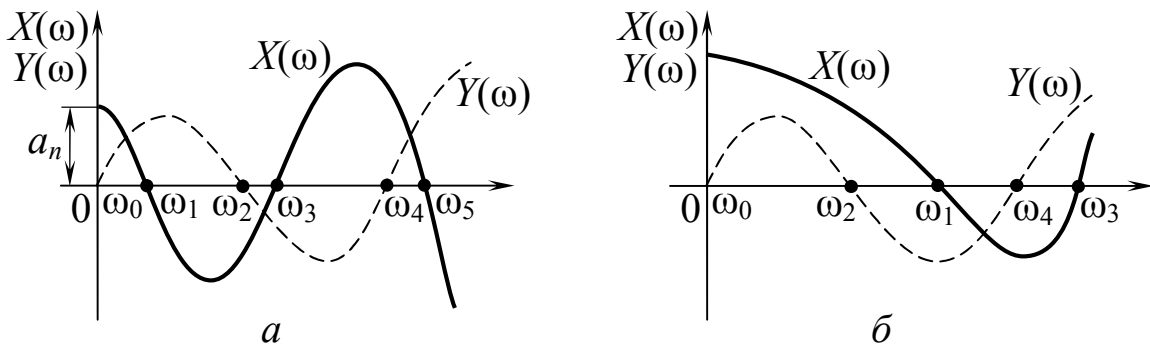


Рис. 4.5. График $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ для устойчивой (а) и неустойчивой (б) систем

уравнений (4.20). Если значения $\omega_0, \omega_2, \omega_4, \dots$ есть корни второго уравнения (4.20), а $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$ — первого уравнения (4.20), причем $\omega_0 < \omega_2 < \omega_4 < \dots$, $\omega_1 < \omega_3 < \omega_5 < \dots$, то для устойчивой системы обязательно соблюдение неравенства

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 < \dots \quad (4.21)$$

В связи с указанным следствием можно привести другую формулировку критерия устойчивости Михайлова: *система, автоматического управления будет устойчива тогда и только*

тогда, когда вещественная $X(\omega)$ и мнимая $Y(\omega)$ функции Михайлова, приравненные нулю, имеют все действительные перемежающиеся корни, причем общее число этих корней равно порядку характеристического уравнения n , и при $\omega = 0$ удовлетворяются условия

$$X(0) > 0, \quad Y'(0) > 0.$$

Для уравнений до шестого порядка включительно условие перемежаемости корней дает возможность легко провести аналитическое исследование устойчивости, не вычерчивая кривую Михайлова. При этом обычно определяют только корни уравнения $Y(\omega) = 0$. Перемежаемость корней уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ можно проверить подстановкой в $X(\omega)$ найденных корней уравнения $Y(\omega) = 0$. Как видно из рис. 4.5, а, знаки $X(\omega)$ при подстановке возрастающих по абсолютной величине корней должны чередоваться.

Пример 4.2. Снова, как в примере 3.3, рассмотрим устойчивость системы, изображенной на рис. 3.8, при значениях параметров $K = 58 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,01 \text{ с}$, $T_2 = 0,57 \text{ с}$. Как было показано, характеристический полином для этой системы

$$D(\lambda) = T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + K.$$

Тогда для

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

получим выражения

$$X = K - (T_1 + T_2)\omega^2, \quad Y = \omega - T_1 T_2 \omega^3. \quad (4.22)$$

При заданных значениях параметров по формулам (4.22) имеем

$$X(\omega) = K - (T_1 + T_2)\omega^2 = 58 - 0,58\omega^2,$$

$$Y(\omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3 = \omega - 5,7 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

Вычислим $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ для ряда значений частоты ω (некоторые из результатов вычислений представлены в таблице 4.1).

Таблица 4.1

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	5	10	13	15	∞
$X(\omega)$	58	43,5	$7,1 \cdot 10^{-15}$	-40,02	-72,5	$-\infty$
$Y(\omega)$	0	4,2875	4,3	0,4771	-4,2375	$-\infty$

По данным таблицы построим кривую Михайлова (рис. 4.6).

Как видно, кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранта. Следовательно, система устойчива.

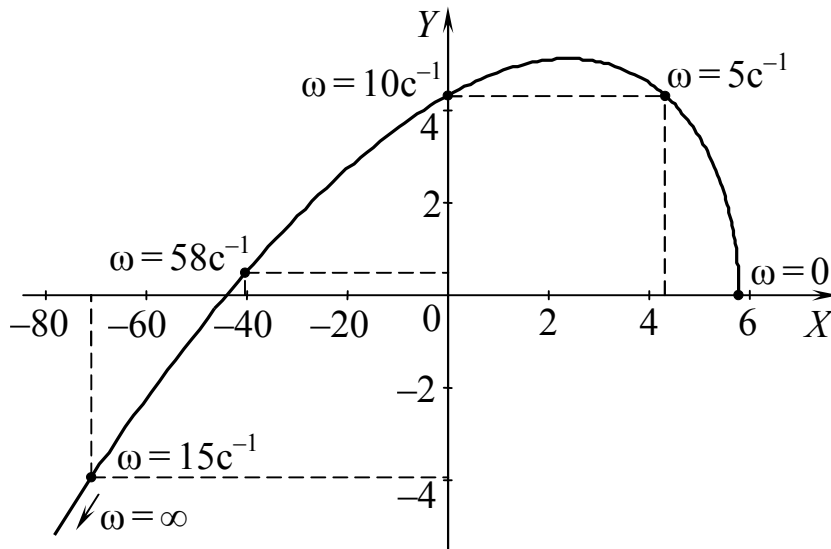


Рис. 4.6. Кривая Михайлова к примеру 4.2

Пример 4.3. Построить годографы Михайлова для системы автоматического регулирования, рассмотренной в предыдущем примере, при следующих параметрах:

- а) $T_1 = 0,05$ с, $T_2 = 0,5$ с, $K = 2,2$ с⁻¹;
- б) $T_1 = 0,05$ с, $T_2 = 0,5$ с, $K = 22$ с⁻¹;
- в) $T_1 = 0,05$ с, $T_2 = 0,5$ с, $K = 220$ с⁻¹.

Решение. Подставляя в формулы (3.72) данные значения параметров, получаем:

а) $X(\omega) = 2,2 - 0,55\omega^2$, $Y(\omega) = \omega - 0,025\omega^3$ с результатами расчетов, представленными в табл. 4.2;

б) $X(\omega) = 22 - 0,55\omega^2$, $Y(\omega) = \omega - 0,025\omega^3$ с результатами в табл. 4.3;

в) $X(\omega) = 220 - 0,55\omega^2$, $Y(\omega) = \omega - 0,025\omega^3$ с результатами в табл. 4.4.

Таблица 4.2

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	2	3	4	5	6	7	8
$X(\omega)$	2,2	0	-2,75	-6,6	-11,55	-17,6	-24,75	-33
$Y(\omega)$	0	1,8	2,325	2,4	1,875	0,6	-1,575	-4,8

Таблица 4.3

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	4	6	8	10
$X(\omega)$	22	13,2	2,2	-13,2	-33
$Y(\omega)$	0	2,4	0,6	-4,8	-15

Таблица 4.4

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	4	6	8	10
$X(\omega)$	220	211,2	200,2	184,8	165
$Y(\omega)$	0	2,4	0,6	-4,8	-15

Расчетные годографы Михайлова представлены на рис. 4.7.

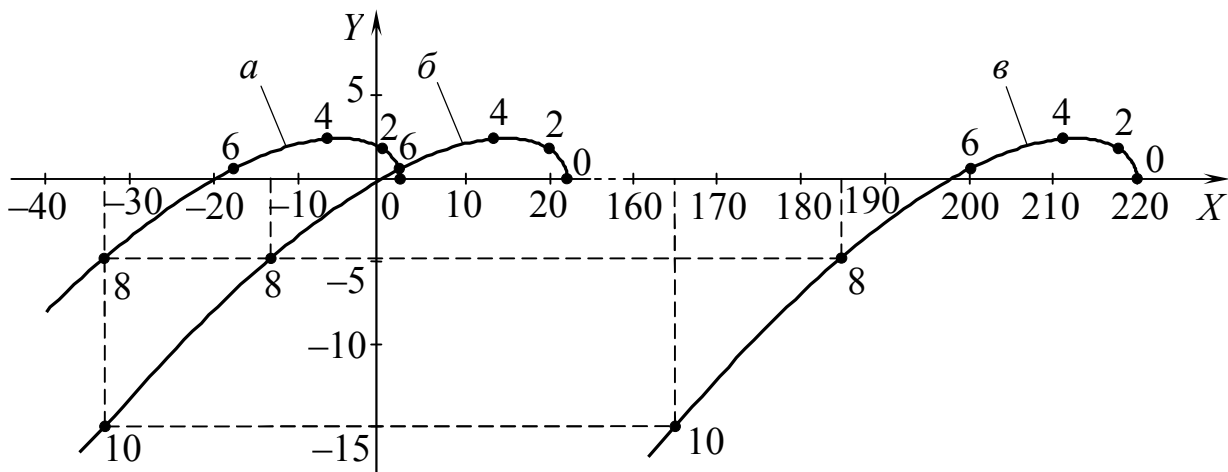


Рис. 4.7. Годографы Михайлова для следящей системы третьего порядка при $T_1 = 0,05 \text{ с}$, $T_2 = 0,5 \text{ с}$ и различных значениях коэффициента усиления $K = 2,2 \text{ с}^{-1}$ (а), 22 с^{-1} (б) и 220 с^{-1} (в)

Как видно, в варианте а) при $n = 3$ годограф Михайлова последовательно проходит три квадранта против часовой стрелки. Это указывает на то, что система при $K = 2,2 \text{ с}^{-1}$ устойчива.

В варианте б) при $\omega_0^2 = 1/0,025 = 40 \text{ с}^{-2}$, т. е. $\omega_0 = 6,324 \text{ с}^{-1}$ имеем $Y(\omega_0) = 0$; $X(\omega_0) = 22 - 0,55 \cdot 40 = 0$, т. е. система находится на границе устойчивости.

При $K = 220 \text{ с}^{-1}$ годограф Михайлова проходит два квадранта (первый и четвертый). При этом нарушается последовательность обхода квадрантов, что указывает на неустойчивость системы.

Критерий устойчивости Найквиста. Этот частотный критерий устойчивости, разработанный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазочастотной характеристики разомкнутой системы.

Рассмотрим разные случаи.

Система, устойчивая в разомкнутом состоянии. Передаточная функция разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} = \frac{K(b_0s^m + \dots + 1)}{c_0s^n + \dots + 1}, \quad m < n. \quad (4.23)$$

Этот случай соответствует системам автоматического управления без астатизма. Введем вспомогательную функцию

$$W_1(s) = 1 + W(s) = \frac{L(s) + KN(s)}{L(s)} = \frac{D(s)}{L(s)},$$

где $D(s)$ – характеристический многочлен замкнутой системы, а $L(s)$ – характеристический многочлен разомкнутой цепи этой системы.

Подставив $s = j\omega$, получим

$$W_1(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{L(j\omega)}.$$

По критерию Михайлова изменение аргумента $L(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ равно $n\frac{\pi}{2}$, так как предполагается, что разомкнутая цепь устойчива. С другой стороны, требуется, чтобы система была устойчивой в замкнутом состоянии. Для этого нужно потребовать, чтобы изменение аргумента $D(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ также равнялось $n\frac{\pi}{2}$.

Отсюда следует, что изменение аргумента $W_1(j\omega)$ должно быть:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg L(j\omega) = 0.$$

Это значит, что годограф $W_1(j\omega)$ не должен охватывать начало координат (рис. 4.8). Вернемся теперь к функции

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) - 1,$$

которая представляет собой амплитудно-фазочастотную характеристику разомкнутой цепи (рис. 4.9).

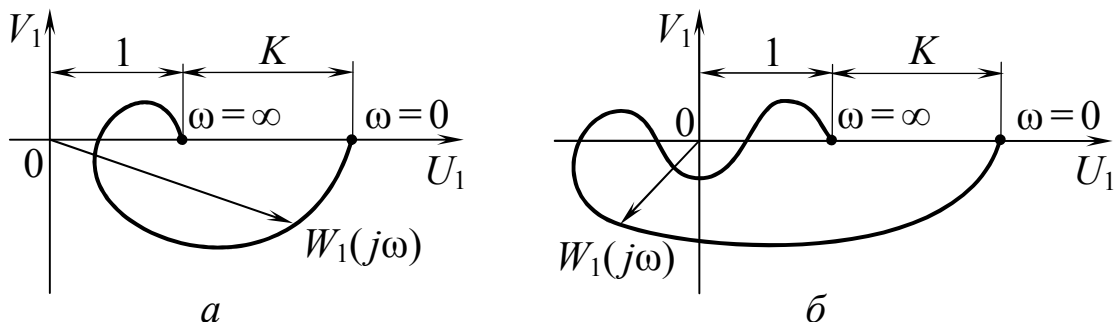


Рис. 4.8. Годографы вспомогательной функции $W_1(j\omega)$ для устойчивой замкнутой системы

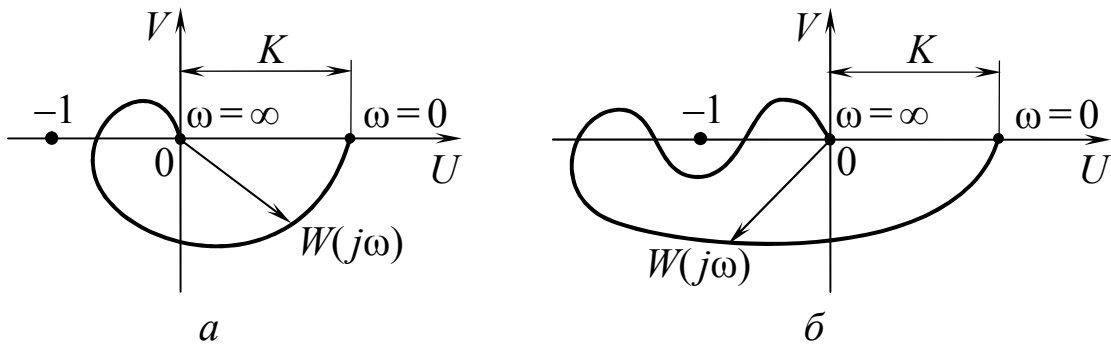


Рис. 4.9. АФЧХ системы в разомкнутом состоянии, соответствующие годографам вспомогательной функции, представленным на рис. 4.8, *a* и *б*

Отсюда получаем следующую формулировку частотного критерия Найквиста.

Если разомкнутая цепь системы устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи не охватывала точку $(-1, j0)$ (см. рис. 4.9).

График на рис. 4.9, *a* соответствует случаю, когда устойчивость системы нарушится только с увеличением общего коэффициента усиления разомкнутой цепи K , а график на рис. 4.9, *б* — случаю, когда и при уменьшении K система может стать неустойчивой (пропорционально значению K , согласно (4.23), меняются радиус-векторы всех точек характеристики). Неустойчивость замкнутой системы иллюстрируется на рис. 4.10.

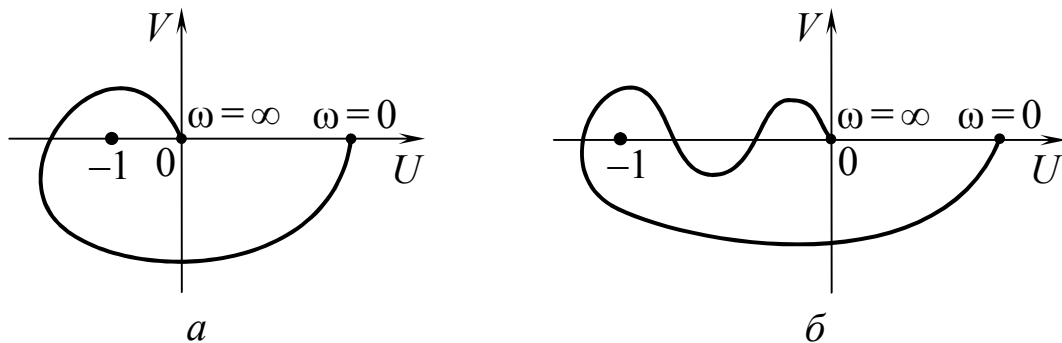


Рис. 4.10. Вид АФЧХ разомкнутой системы для неустойчивых замкнутых систем

Имея в виду сложные очертания амплитудно-фазовых характеристик (клювообразного вида и более сложные), к записанной выше формулировке частотного критерия добавляется разъяснение, что надо понимать под термином «неохват точки $(-1, j0)$ ». Характеристика может пересекать отрицательную ось

левее точки $(-1, j0)$, но тогда число положительных (сверху вниз) переходов характеристики через ось абсцисс левее точки $(-1, j0)$ должно равняться числу отрицательных переходов (снизу вверх).

Система, нейтральная в разомкнутом состоянии. В этом случае характеристический многочлен разомкнутой цепи $L(s)$ имеет ν нулевых корней, а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Передаточная функция разомкнутой цепи $W(s)$ имеет соответственно нулевые полюса:

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} = \frac{K(b_0 s^m + \dots + 1)}{s^\nu (c_\nu s^{n-\nu} + \dots + 1)}, \quad m < n. \quad (4.24)$$

Это соответствует *астатическим системам*, причем ν – порядок астатизма.

Рассмотрим сначала случай $\nu = 1$, т. е.

$$L(s) = s(c_1 s^{n-1} + \dots + 1).$$

Плоскость корней для $L(s)$ имеет вид, примерно, как показано на рис. 4.11. Подстановка $s = j\omega$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ означает пе-

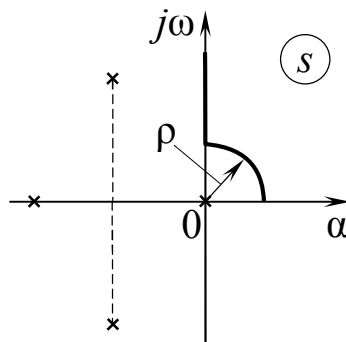


Рис. 4.11. Изображение плоскости полюсов разомкнутой цепи для астатической системы; кривая, описываемая концом вектора $j\omega$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ (жирная линия)

ремещение вдоль оси ω от точки 0 вверх.

Чтобы освободиться от неопределенности при $\omega = 0$ в выражении для $W(j\omega)$, при изменении частоты ω от 0 до ∞ обходят начало координат справа по четверти окружности бесконечно малого радиуса ρ (рис. 4.11)

$$s = \rho e^{j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Обходу начала координат по малой дуге $\rho e^{j\varphi}$ в плоскости полюсов соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} \Big|_{s=0} = \frac{K}{\rho e^{j\varphi}} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = KR e^{-j\varphi} \Big|_{R \rightarrow 0}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.25)$$

где $R = 1/\rho$.

Следовательно, точке $\omega = 0$ плоскости корней соответствует на характеристике $W(j\omega)$ четверть окружности бесконечного радиуса (рис. 4.12, а). Поскольку при этом все корни $L(s)$ оставались слева, то формулировка критерия устойчивости остается такой же, как и для случая устойчивой разомкнутой цепи, а именно: не должна охватываться точка $(-1, j0)$.

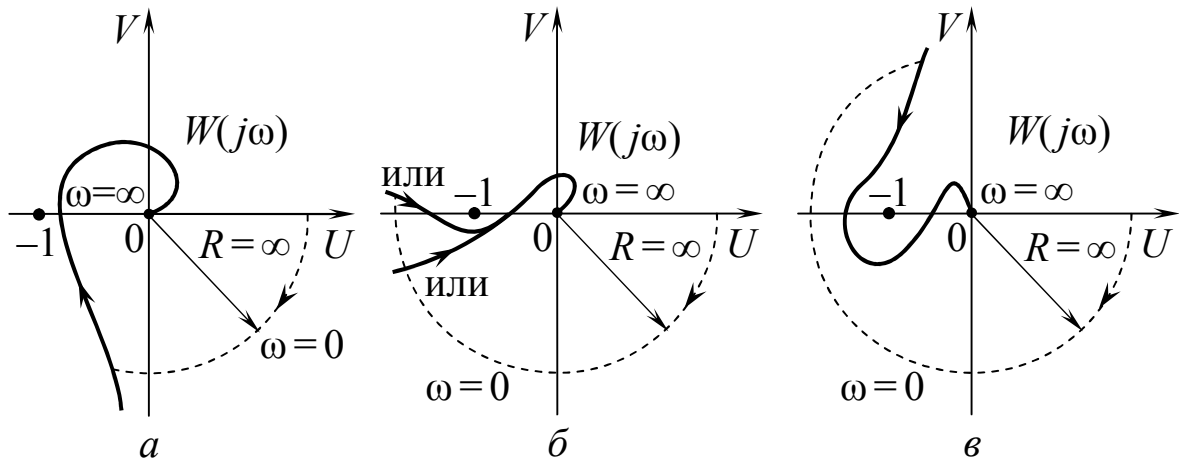


Рис. 4.12. АФЧХ разомкнутой системы для устойчивой астатической системы с астатизмом ν первого (а), второго (б) и третьего (в) порядков

В случае $\nu = 2$ и $\nu = 3$ аналогично получаем ту же формулировку критерия – нехватка точки $(-1, j0)$, как показано на рис. 4.12, б и в.

Для сложных очертаний амплитудно-фазочастотных характеристик в число отрицательных переходов надо включать и переход пунктирной окружности бесконечно большого радиуса при $\omega = 0$.

Система с неустойчивой разомкнутой цепью. Пусть характеристический многочлен $L(s)$ разомкнутой цепи имеет l корней с положительной вещественной частью. Тогда введенная выше вспомогательная функция

$$W_1(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{L(s)}$$

при замене $s = j\omega$, согласно критерию Михайлова, для устойчивости замкнутой системы должна иметь следующее изменение аргумента при $0 \leq \omega \leq \infty$:

$$\begin{aligned} \Delta \arg W_1(j\omega) &= \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg L(j\omega) = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2l) \frac{\pi}{2} = l\pi. \end{aligned}$$

Это значит, что для устойчивости замкнутой системы требуется, чтобы амплитудно-фазочастотная характеристика разомкнутой цепи охватывала точку $(-1, j0)$ против часовой стрелки на угол $l\pi$, где l – число полюсов с положительной вещественной частью в передаточной функции неустойчивой разомкнутой цепи данной системы. Другими словами, левее точки $(-1, j0)$ разность между числом положительных и числом отрицательных переходов амплитудно-фазовой частотной характеристики через ось абсцисс должна равняться $l/2$.

Например, если передаточная функция разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{K(b_0 s^m + \dots + 1)}{c_0 s^n + \dots - 1}$$

имеет $l = 1$ (один положительный полюс), то для устойчивости замкнутой системы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи должна иметь вид, примерно показанный на рис. 4.13, а или б, а в случае $l = 3$ – на рис. 4.13, в. При этом начальная точка характеристики на оси абсцисс левее точки $(-1, j0)$ считается как половина перехода.

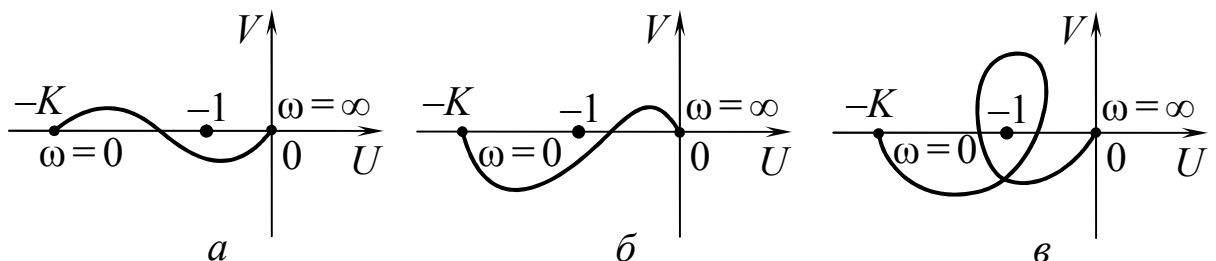


Рис. 4.13. АФЧХ разомкнутой системы при наличии у ее передаточной функции одного положительного полюса ($l = 1$) (а или б) и трех положительных полюсов ($l = 3$) (в)

Случай наличия пары чисто мнимых полюсов передаточной функции разомкнутой цепи. Этот случай может сочетаться со случаями расположения всех остальных полюсов слева от мнимой оси или наличия нулевого полюса, или, наконец, наличия полюсов справа. Во всех вариантах формулировки частотного критерия устойчивости замкнутой системы остаются прежними, причем разрыв характеристики в точке мнимого полюса заполняется полуокружностью бесконечного радиуса (рис. 4.14). Это вытекает из замены на плоскости s точки мнимого полюса полуокружностью малого радиуса, и образования соответствующего контура обхода, аналогично тому, как на рис. 4.14 обходилась точка нулевого полюса.

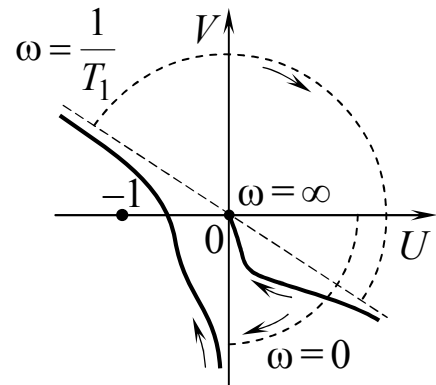


Рис. 4.14. АФЧХ разомкнутой системы при наличии пары чисто мнимых полюсов

Через T_1 на рис. 4.14 обозначена постоянная времени соответствующего сомножителя $(T_1^2 s^2 + 1)$, являющегося источником пары чисто мнимых корней в знаменателе передаточной функции $W(s)$ разомкнутой цепи.

Пример 4.4. Как и в предыдущем примере, рассмотрим следящую систему (рис. 3.8), у которой передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где $K = 100 \text{ с}^{-1}$ – добротность системы по скорости; $T_1 = 0,1 \text{ с}$; $T_2 = 0,02 \text{ с}$.

Определить устойчивость замкнутой системы, используя критерий Найквиста.

Решение. Преобразуем выражение для $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= -\frac{jK(1 - j\omega T_1)(1 - j\omega T_2)}{\omega[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} = -\frac{jK(1 - j\omega T_1)(1 - j\omega T_2)}{\omega[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} = \\ &= -\frac{jK(1 - j\omega T_1 - j\omega T_2 - \omega^2 T_1 T_2)}{\omega[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} = -\frac{jK(1 - \omega^2 T_1 T_2) - K\omega(T_1 + T_2)}{\omega[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} = \\ &= \frac{-K\omega(T_1 + T_2) - jK(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} = U + jV, \end{aligned}$$

где

$$U = -\frac{K\omega(T_1 + T_2)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} = -\frac{12}{(1 + 0,01\omega^2)(1 + 4 \cdot 10^{-4} \omega^2)};$$

$$V = \frac{K(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} = \frac{100(0,002\omega^2 - 1)}{\omega(1 + 0,01\omega^2)(1 + 4 \cdot 10^{-4} \omega^2)}.$$

Задаваясь значениями частоты ω , по полученным формулам рассчитываем значения величин $U(\omega)$ и $V(\omega)$ (табл. 4.5), затем строим кривую на рис. 4.15. Построенный на рис. 4.15 участок АФЧХ в третьем квадранте при уменьшении частоты ω удаляется от мнимой оси. Однако, как видно из выражений для $U(\omega)$ и $V(\omega)$, имеем $U(0) = -12$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} V(\omega) = -\lim_{\omega \rightarrow 0} 100/\omega = -\infty$, т. е. кривая при $\omega \rightarrow 0$ стремится к вертикальной асимптоте, проходящей через точку $(-12, 0)$.

Таблица 4.5

ω, c^{-1}	0	10	15	20	25	50	∞
U	-12	-5,769	-3,387	-2,069	-1,324	-0,231	0
V	$-\infty$	-3,846	-1,035	-0,172	0,110	0,154	0

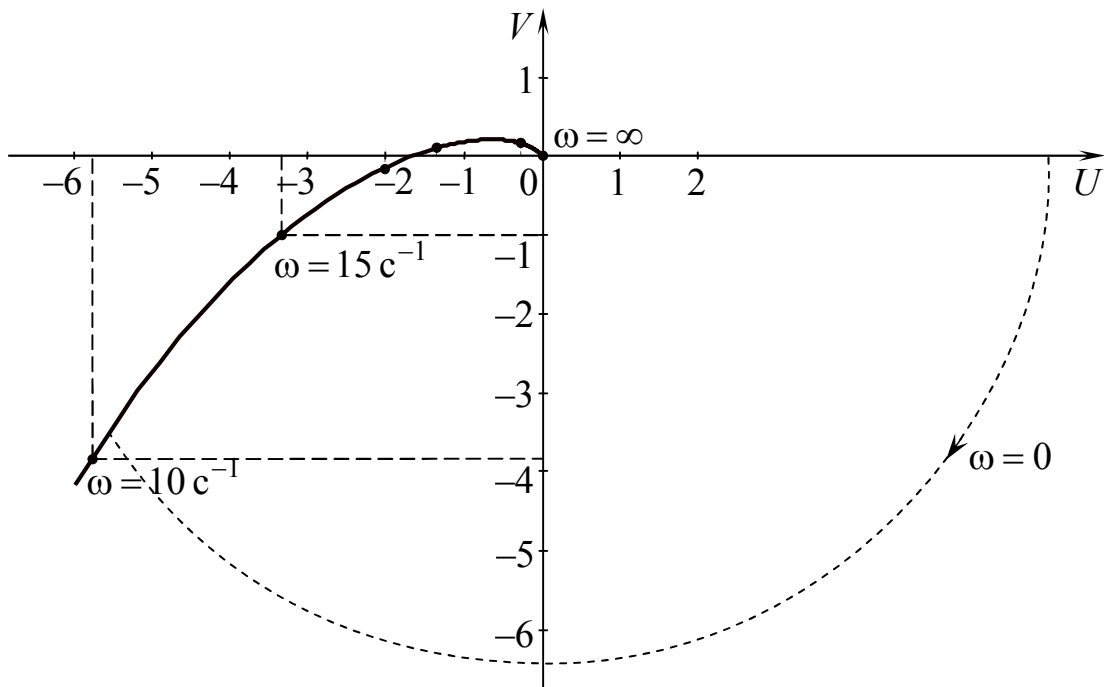


Рис. 4.15. АФЧХ разомкнутой системы к примеру 4.4

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы имеет один нулевой корень. Поэтому ветвь АФЧХ, соответствующую частоте $\omega \rightarrow 0$, изобразим в виде дуги окружности бесконечно большого радиуса так, чтобы вектор $W(j\omega)$ повернулся по часовой стрелке на угол, равный 90° . Из рисунка видно, что АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку $(-1, j0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

Пример 4.5. Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость системы автоматической стабилизации летательного аппарата, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)}{s(-1 + T_1 s)},$$

где $K = 4 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 1 \text{ с}$, $\tau_1 = 0,5 \text{ с}$.

Решение. Поскольку характеристический многочлен разомкнутой системы

$$L(\lambda) = \lambda(-1 + T_1 \lambda)$$

имеет один положительный корень $1/T_1$, разомкнутая система неустойчива.

Преобразуем выражение для АФЧХ разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K(1 + j\omega\tau_1)}{j\omega(-1 + j\omega T_1)} = -\frac{jK(1 + j\omega\tau_1)(-1 - j\omega T_1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)} = \\ &= -\frac{jK(-1 - j\omega\tau_1 - j\omega T_1 + \omega^2 T_1 \tau_1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)} = \frac{-K\omega(T_1 + \tau_1) + jK(1 - \omega^2 T_1 \tau_1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}, \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$U = -\frac{K(T_1 + \tau_1)}{1 + \omega^2 T_1^2}; \quad V = \frac{K(1 - \omega^2 T_1 \tau_1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}.$$

Подставляя численные значения параметров, получаем

$$U = -\frac{6}{1 + \omega^2}; \quad V = \frac{4(1 - 0,5\omega^2)}{\omega(1 + \omega^2)}$$

и рассчитываем кривую (табл. 4.6), показанную на рис. 4.16.

Таблица 4.6. Результаты расчета точек АФЧХ

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	0,5	1	2	3	∞
U	-6	-4,8	-3	-1,2	-0,6	0
V	$-\infty$	5,6	1	-0,4	-0,4666	0

Поскольку характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет один нулевой корень, ветвь АФЧХ разомкнутой системы, соответствующую частотам $\omega \rightarrow 0$, дополним дугой окружности бесконечно большого радиуса (штриховая линия на рис. 4.16).

Поскольку, кроме того, характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет один положительный корень, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф $W(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ охватывал точку $(-1, j0)$ в положительном направлении на угол π . Или, иначе говоря, разность между числом положительных и отрица-

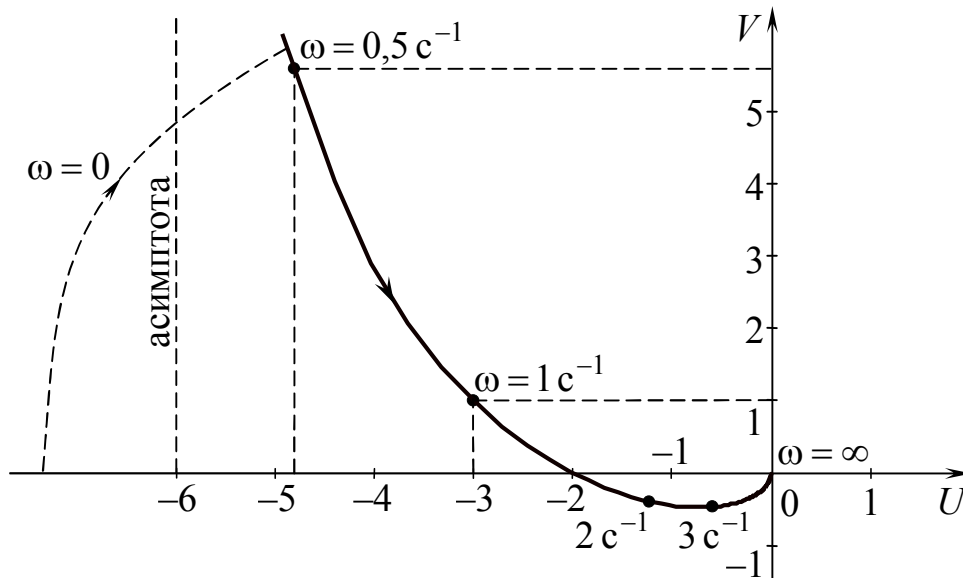


Рис. 4.16. АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы

тельных переходов АФЧХ через вещественную ось левее точки $(-1, j0)$ при изменении частоты от 0 до ∞ должна равняться $0,5$. Из рис. 4.16 видно, что имеют место полперехода в отрицательном направлении (на частоте $\omega=0$) и один положительный переход, разность переходов равна $0,5$. Условие устойчивости выполняется, поэтому замкнутая система устойчива.

Пример 4.6. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2^2 s^2)},$$

где $K = 1 \text{ с}^{-1}$ – общий коэффициент усиления разомкнутой системы; $T_1 = 0,2 \text{ с}$ – постоянная времени исполнительного устройства; $T_2 = 0,5 \text{ с}$ – постоянная времени объекта; $\tau_1 = 0,1 \text{ с}$ – постоянная времени корректирующего устройства.

Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость замкнутой системы.

Решение. Этот случай интересен тем, что характеристическое уравнение разомкнутой системы

$$L(\lambda) = (1 + T_1 \lambda)(1 + T_2^2 \lambda^2) = 0,$$

имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm j/T_2 = \pm 2j$. В связи с этим годограф функции $W(j\omega)$ имеет разрыв на частотах, соответствующих мнимым корням.

Преобразуем выражение для $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_1)}{(1 + j\omega T_1)(1 - \omega^2 T_2^2)} = \frac{K(1 + j\omega\tau_1)(1 - j\omega T_1)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 - \omega^2 T_2^2)} =$$

$$= \frac{K(1 - j\omega T_1 + j\omega\tau_1 + \omega^2 T_1\tau_1)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 - \omega^2 T_2^2)} = \frac{K(1 + \omega^2 T_1\tau_1) - jK\omega(T_1 - \tau_1)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 - \omega^2 T_2^2)},$$

$$U = \frac{K(1 + \omega^2 T_1\tau_1)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 - \omega^2 T_2^2)} = \frac{1 + 0,02\omega^2}{(1 + 0,04\omega^2)(1 - 0,25\omega^2)};$$

$$V = -\frac{K\omega(T_1 - \tau_1)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 - \omega^2 T_2^2)} = -\frac{0,1\omega}{(1 + 0,04\omega^2)(1 - 0,25\omega^2)}.$$

Задавая значения частоты ω и вычисляя по полученным формулам значения U и V , получаем координаты точек (табл. 4.7) для построения АФЧХ (рис. 4.17).

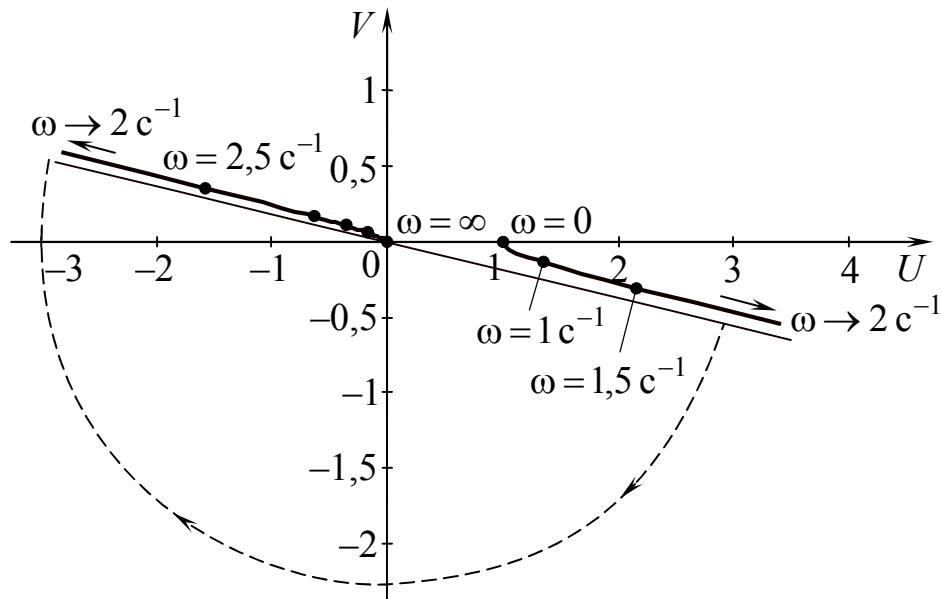


Рис. 4.17. АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы с двумя чисто мнимыми полюсами

Таблица 4.7. Результаты расчета координат точек АФЧХ к примеру 4.6

ω, c^{-1}	0	1	1,5	2,5	3	4	5
U	1	1,308	2,191	-1,6	-0,694	-0,268	-0,143
V	0	-0,128	-0,315	0,3(5)	0,176	0,0813	0,0476

Выразив знаменатель из выражения для U и подставив в выражение для V , получим

$$V = -\frac{(T_1 - \tau_1)\omega}{1 + \omega^2 T_1\tau_1} U.$$

Отсюда при $\omega = 1/T_2$ имеем уравнение асимптоты

$$V = -\frac{T_1 - \tau_1}{T_2 \left(1 + \frac{T_1\tau_1}{T_2^2}\right)} U; \quad V = -\frac{T_1 - \tau_1}{T_2 + \frac{T_1\tau_1}{T_2}} U,$$

где

$$\frac{T_1 - \tau_1}{T_2 + \frac{T_1 \tau_1}{T_2}} = \frac{0,1}{0,5 + \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,5}} = \frac{0,1}{0,54} = 0,185 \dots, \text{ т. е. } V = -0,185U.$$

На частоте $\omega = 1/T_2 = 2 \text{ с}^{-1}$ АФЧХ имеет разрыв. Ветви АФЧХ, соответствующие частотам $\omega \rightarrow (1/T_2) - 0$ и $\omega \rightarrow (1/T_2) + 0$, дополним полуокружностью бесконечно большого радиуса. Полуокружность проводим по часовой стрелке (что соответствует увеличению ω на мнимой оси плоскости корней) от ветви АФЧХ, соответствующей $\omega \rightarrow (1/T_2) - 0$, к ветви, соответствующей $\omega \rightarrow (1/T_2) + 0$.

Видно, что АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку $(-1, j0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

Одним из достоинств критерия Найквиста является то, что он может быть применен и в тех практически важных случаях, когда неизвестны уравнения некоторых звеньев системы либо даже неизвестно уравнение всей разомкнутой системы в целом, но амплитудно-фазочастотная характеристика разомкнутой системы может быть получена экспериментально. Кроме того, критерий Найквиста позволяет довольно просто исследовать устойчивость систем с запаздыванием.

Так как параметры системы обычно определяют приближенно и в процессе работы они могут изменять свое значение, то важна оценка удаления амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы $W(j\omega)$ от точки $(-1, j0)$.

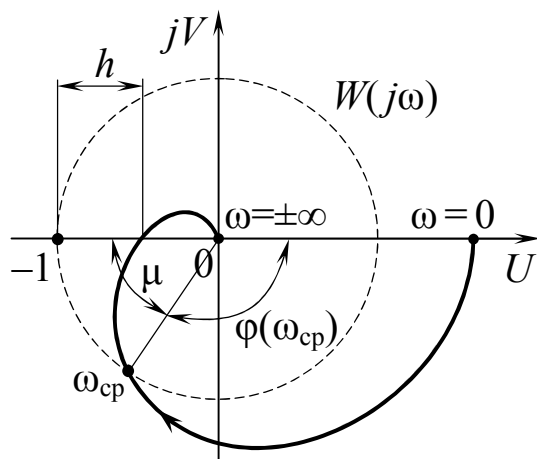


Рис. 4.18. Иллюстрация понятий о запасах устойчивости при помощи АФЧХ разомкнутой системы

Это удаление определяет запас устойчивости, который характеризуется двумя величинами: запасом устойчивости по фазе и запасом устойчивости по амплитуде.

Запас устойчивости по фазе определяют как значение угла $\mu = \pi - |\varphi(\omega_{\text{ср}})|$ для частоты $\omega_{\text{ср}}$, при которой $|W(j\omega_{\text{ср}})| = 1$; **по амплитуде** – как длину отрезка оси абсцисс h , заключенного между критической точкой $(-1, j0)$ и амплитудно-фазовой частотной характеристикой (рис. 4.18).

4.3. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

В инженерной практике широкое применение получил анализ устойчивости систем автоматического управления, основанный на применении логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Это обусловлено прежде всего тем, что построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем, особенно асимптотических логарифмических частотных характеристик, значительно проще, чем построение годографа амплитудно-фазочастотных характеристик (АФЧХ).

Покажем, каким требованиям должны удовлетворять логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) и логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) разомкнутой системы, при которых обеспечивалась бы устойчивость системы в замкнутом состоянии.

Как было показано выше, устойчивость связана с числом переходов амплитудно-фазочастотной характеристики $W(j\omega)$ отрезка $(-\infty, -1)$ отрицательной вещественной полуоси. Когда амплитудно-фазочастотная характеристика $W(j\omega)$ пересекает отрицательную вещественную полуось, ЛФЧХ пересекает одну из линий $\pm\pi(2i+1)$, где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ (рис. 4.19). Переходы через эти линии не опасны с точки зрения устойчивости, если

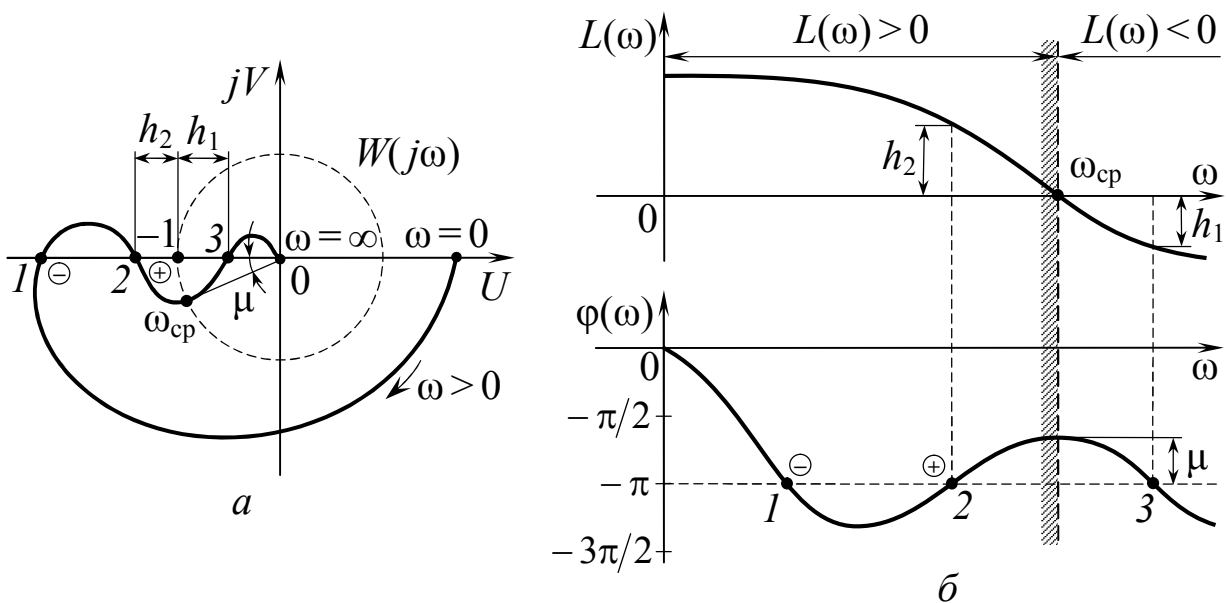


Рис. 4.19. АФЧХ разомкнутой системы (а) и соответствующие ей ЛАЧХ и ЛФЧХ (б)

они совершаются справа от точки $(-1, j0)$, т. е. если при этом модуль АФЧХ меньше единицы $|W(j\omega)| < 1$ и, следовательно, если ординаты ЛАЧХ отрицательны, т. е. $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| < 0$. Поэтому область отрицательных ЛАЧХ при исследовании устойчивости не представляет интереса.

Положительному переходу (сверху вниз) через отрезок $(-\infty, -1)$ характеристики $W(j\omega)$ соответствует пересечение ЛФЧХ при $L(\omega) > 0$ прямой $\pm\pi(2i+1)$ снизу вверх (точка 2 на рис. 4.19, а), а отрицательному переходу через этот отрезок характеристики $W(j\omega)$ – пересечению ЛФЧХ при $L(\omega) > 0$ прямой $\pm\pi(2i+1)$ сверху вниз (точка 1 на рис. 4.19, б).

Критерий устойчивости Найквиста применительно к логарифмическим частотным характеристикам может быть сформулирован следующим образом: *для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов логарифмической фазочастотной характеристикой прямых $\pm(2i+1)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, во всех областях, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика положительна $L(\omega) > 0$, была равна $l/2$ (l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).*

Из анализа этих ЛАЧХ и ЛФЧХ (рис. 4.19, б) видно, что разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ прямых $-\pi$ при $L(\omega) > 0$ равна нулю. Таким образом, если разомкнутая система была устойчива ($l=0$), то и замкнутая система будет устойчива, при этом запасы устойчивости по амплитуде равны h_1 и h_2 , а запас устойчивости по фазе равен μ .

Пример 4.7. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)},$$

где $K = 75 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,02 \text{ с}$, $T_2 = 0,005 \text{ с}$.

Определить устойчивость замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

Решение. Устойчивость будем определять по асимптотической ЛАЧХ и ЛФЧХ. Частоты изломов (сопрягающие частоты) ЛАЧХ

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,005} = 200 \text{ с}^{-1}.$$

Первый участок асимптотической ЛАЧХ ($\omega < \omega_1$) (рис. 4.20) является частью прямой с наклоном -20дБ/дек , пересекающей ось частот в точке $\omega = K$:

$$20 \lg K - 20 \lg \omega = 0, \text{ откуда } \omega = K = 75 \text{ с}^{-1}.$$

В данном случае разомкнутая система нейтральна. Как было показано, в случаях, когда разомкнутая система устойчива или нейтральна, АФЧХ разомкнутой системы не должна охватывать точку $(-1, j0)$. Это значит, что при $\varphi = -180^\circ$ должно выполняться условие

$$A(\omega) = |W(j\omega)| < 1 \text{ или } L(\omega) = 20 \lg A < 0.$$

Следовательно, точка пересечения ФЧХ с линией -180° должна лежать правее частоты среза $\omega_{\text{ср}}$, т. е. правее точки пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс.

Найдем частоту среза разомкнутой системы по асимптотической ЛАЧХ. Значение ЛАЧХ при $\omega = \omega_1$

$$\begin{aligned} 20 \lg A(\omega_1) &= 20 \lg K - 20 \lg \omega_1 = 20 \lg 75 - 20 \lg 50 = \\ &= 20(1,8751 - 1,6990) = 3,522 > 0, \end{aligned}$$

значит, $\omega_{\text{ср}} > \omega_1$. В диапазоне частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ асимптотическая ЛАЧХ описывается выражением

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega_1 - 40(\lg \omega - \lg \omega_1) = \\ &= 20 \lg K + 20 \lg \omega_1 - 40 \lg \omega. \end{aligned}$$

На частоте $\omega = \omega_2$

$$\begin{aligned} L(\omega_2) &= 20 \lg K + 20 \lg \omega_1 - 40 \lg \omega_2 = 20(\lg 75 + \lg 50 - 2 \lg 200) = \\ &= 20 \lg \frac{75 \cdot 50}{200^2} = -20,561 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega_1 < \omega_{\text{ср}} < \omega_2$ и

$$20 \lg K + 20 \lg \omega_1 - 40 \lg \omega_{\text{ср}} = 0,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \lg \omega_{\text{ср}} &= \frac{\lg K + \lg \omega_1}{2} = \lg(K\omega_1)^{1/2} = \lg \sqrt{K\omega_1}, \\ \omega_{\text{ср}} &= K\omega_1 = 61,237 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Фазочастотная характеристика разомкнутой системы определяется выражением

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 = -\frac{\pi}{2} - \arctg 0,02\omega - \arctg 0,005\omega,$$

по которому рассчитана табл. 4.8 и рис. 4.20.

Таблица 4.8. Результаты расчета ФЧХ

$\omega, \text{ с}^{-1}$	10	20	50	100	200	500	1000
--------------------------	----	----	----	-----	-----	-----	------

φ , рад	-1,810	-2,052	-2,601	-3,141	-3,68	-4,232	-4,465
-----------------	--------	--------	--------	--------	-------	--------	--------

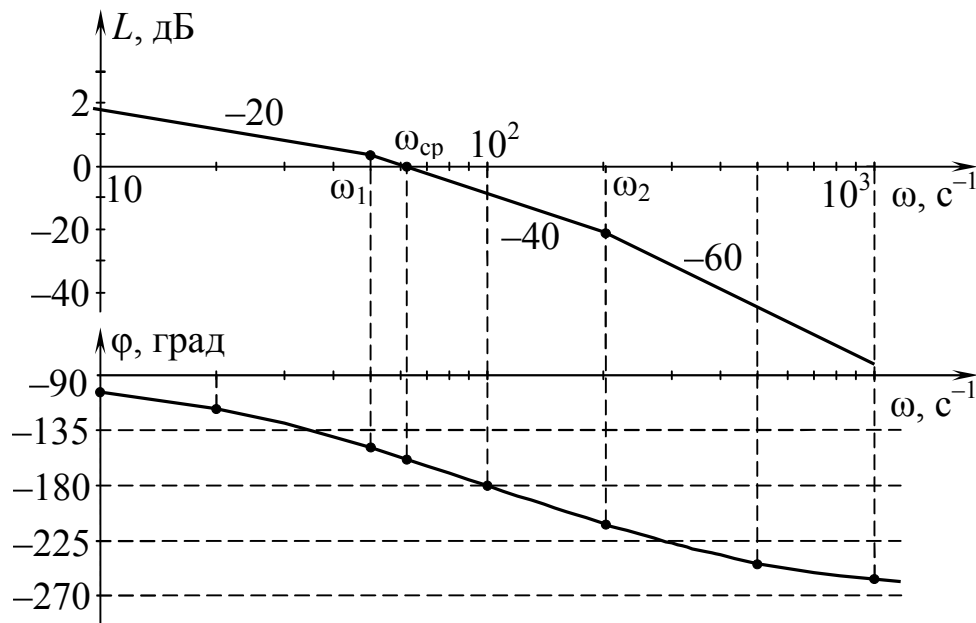


Рис. 4.20. ЛАЧХ и ЛФЧФ к примеру 4.7

φ , град	-104	-117,5	-149,0	-180	-211	-242,5	-256
------------------	------	--------	--------	------	------	--------	------

На частоте среза $\omega_{cp} = 61,237 \text{ с}^{-1}$

$$\varphi(\omega_{cp}) = -\frac{\pi}{2} - 0,8861 - 0,2971 = -2,7540 = -157,8^\circ.$$

Имеется запас по фазе, что свидетельствует о том, что ЛФЧХ пересекает линию $\varphi = -180^\circ$ при отрицательных значениях ЛАЧХ. Следовательно, замкнутая система устойчива.

Пример 4.8. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

где $K = 300 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,02 \text{ с}$, $T_2 = 0,005 \text{ с}$, $\tau_1 = 0,0045 \text{ с}$. Определить устойчивость замкнутой системы.

Решение. ЛАЧХ разомкнутой системы описывается выражением

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} - \\ - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega \tau_1)^2},$$

ФЧХ – выражением

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 + \arctg \omega \tau_1.$$

Частоты изломов асимптотической ЛАЧХ равны

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,005} = 200 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0,0045} = 222,2 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку в диапазоне частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ справедливы приближенные равенства

$$W(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega^2 T_1}, \quad |W(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2 T_1},$$

то приравнивая $|W(j\omega)| = 1$, получаем уравнение для частоты среза

$$\omega_{\text{ср}} \approx \sqrt{\frac{K}{T_1}} = 122,5 \text{ с}^{-1}.$$

Результаты расчета ФЧХ по формуле

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg 0,02\omega - \arctg 0,005\omega + \arctg 0,0045\omega$$

сведем в табл. 4.9.

Таблица 4.9. К расчету ФЧХ в примере 4.8

$\omega, \text{с}^{-1}$	10	20	50	100	200	500	1000
$\varphi, \text{рад}$	-1,773	-1,961	-2,380	-2,719	-2,949	-3,080	-3,113
$\varphi, \text{град}$	-101,6	-112,4	-136,4	-155,8	-168,98	-176,4	-178,3

Как видно из рис. 4.21, запас по фазе на частоте $\omega_{\text{ср}}$ $\mu \approx 20^\circ$ и система устойчива.

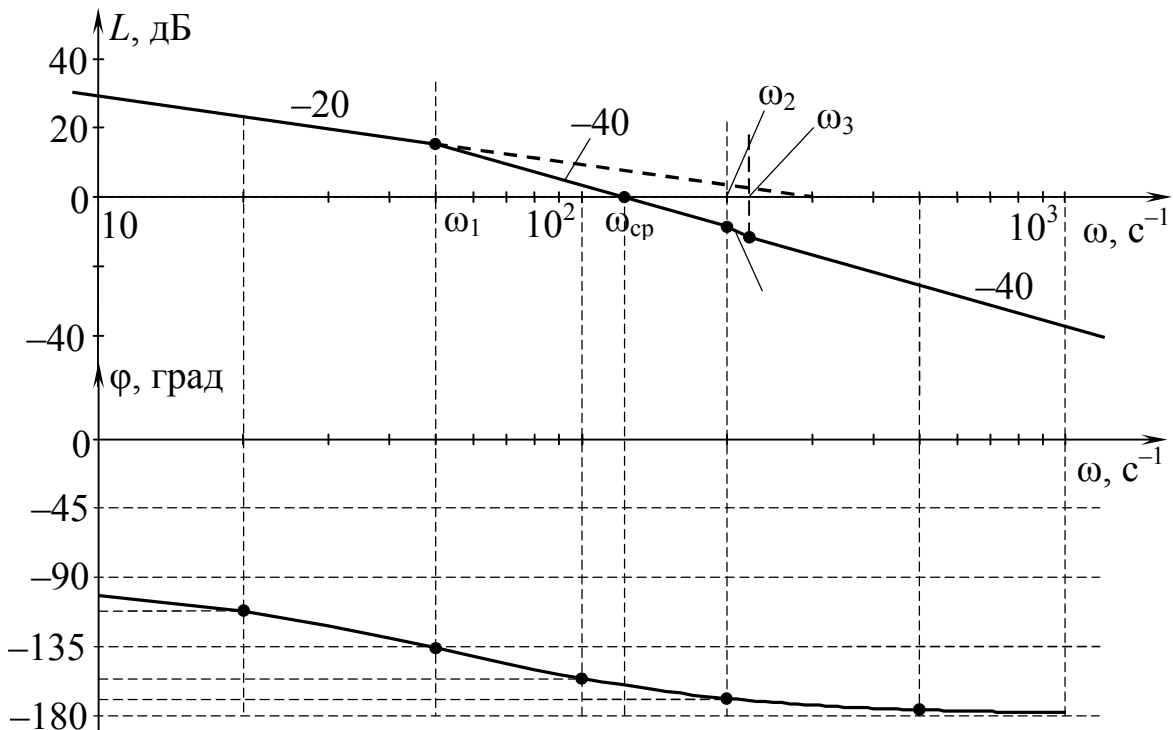


Рис. 4.21. ЛАЧХ и ЛФЧХ к примеру 4.8

Пример 4.9. Определить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{s(1 + 2\zeta T_1 s + T_1^2 s^2)},$$

где $K = 40 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $\zeta = 0,2$. Как видно, разомкнутая система представляет собой последовательное соединение интегрирующего и колебательного звеньев.

Решение. Частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 - T_1^2 \omega^2 + 2\zeta j\omega T_1)};$$

ее модуль

$$|W(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T_1)^2}}$$

и аргумент

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arg(1 - T_1^2 \omega^2 + j2\zeta \omega T_1).$$

При $\omega < 1/T_1$ имеем

$$\arg(1 - T_1^2 \omega^2 + j2\zeta \omega T_1) = \arctg \frac{2\zeta \omega T_1}{1 - T_1^2 \omega^2},$$

а при $\omega > 1/T_1$ –

$$\begin{aligned} \arg(1 - T_1^2 \omega^2 + j2\zeta \omega T_1) &= \pi - \arctg \frac{2\zeta \omega T_1}{|1 - T_1^2 \omega^2|} = \\ &= \pi - \arctg \left(-\frac{2\zeta \omega T_1}{1 - T_1^2 \omega^2} \right) = \pi + \arctg \frac{2\zeta \omega T_1}{1 - T_1^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\zeta \omega T_1}{1 - T_1^2 \omega^2} & \text{при } \omega < \frac{1}{T_1}, \\ -\frac{\pi}{2} - \left(\pi + \arctg \frac{2\zeta \omega T_1}{1 - T_1^2 \omega^2} \right) & \text{при } \omega > \frac{1}{T_1}. \end{cases}$$

ЛАЧХ разомкнутой системы описывается выражением

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T_1)^2} = \\ &= 32,04 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(1 - 42,25 \cdot 10^{-6} \omega^2)^2 + 6,76 \cdot 10^{-6} \omega^2}; \end{aligned}$$

ФЧХ – выражениями

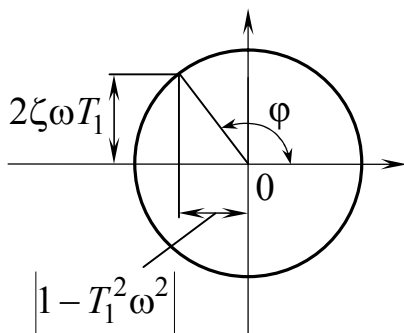


Рис. 4.22. К определению аргумента φ частотной передаточной функции колебательно-го звена при $\omega > 1/T_1$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2,6 \cdot 10^{-3} \omega}{1 - 42,25 \cdot 10^{-6} \omega^2} & \text{при } \omega < 153,846 \text{ с}^{-1}; \\ -\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2,6 \cdot 10^{-3} \omega}{1 - 42,25 \cdot 10^{-6} \omega^2} & \text{при } \omega > 153,846 \text{ с}^{-1}. \end{cases}$$

Таблица 4.10. К расчету ЛАЧХ и ЛФЧХ в примере 4.8

$\omega, \text{с}^{-1}$	10	50	100	153,846	200	500
$L(\omega), \text{дБ}$	12,041	-1,06	-3,991	-3,742	-12,71	-41,62
$\varphi(\omega), \text{рад}$	-1,5708	-1,7115	-1,994	$-\pi$	-4,067	-4,577
$\varphi(\omega), \text{град}$	-90	-98,27	-114,23	-180	-233,0	-262,2

Как видно из рис. 4.23, наличие колебательного звена в системе приводит к тому, что точная ЛАЧХ разомкнутой системы в окрестности резонансной частоты колебательного звена $1/T_1$ существенно отличается от асимптотической (ошибка достигает примерно 10 дБ). Поэтому в этой окрестности приходится использовать точную ЛАЧХ.

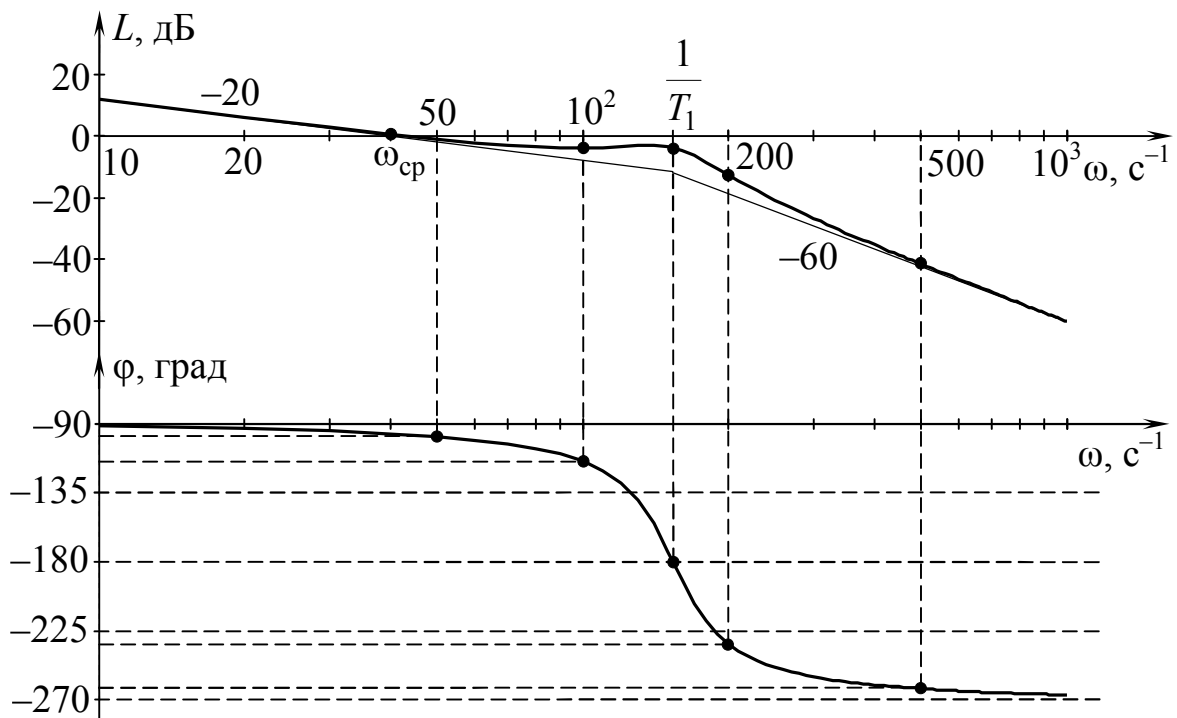


Рис. 4.23. ЛАЧХ и ЛФЧХ к примеру 4.9

Поскольку на частоте среза $\omega_{\text{ср}} \approx 40 \text{ с}^{-1}$ значение фазы составляет $\varphi \approx -90^\circ$ (рис. 4.23), система устойчива.

4.4. Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы

При исследовании устойчивости большое практическое значение имеет построение областей устойчивости в плоскости одного или каких-либо двух параметров, влияние которых на устойчивость исследуют, а также построение семейства областей

устойчивости в плоскости двух параметров при различных фиксированных значениях третьего параметра.

Уравнение границ областей устойчивости можно находить, пользуясь любым критерием устойчивости.

Пример 4.10. Рассмотрим пример определения границ устойчивости системы по критерию Гурвица. Пусть, как и в прежнем примере 4.1 характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид

$$D(\lambda) = T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + K.$$

Тогда по критерию Гурвица было получено условие устойчивости

$$K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (4.26)$$

Условия для определения границ устойчивости ($n = 3$):

- 1) $a_n = K = 0$;
- 2) $\Delta_{n-1} = \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = T_1 + T_2 - K T_1 T_2 = 0$, откуда следует

$$K_{\text{гр}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2};$$

- 3) $a_0 = T_1 T_2 = 0$.

Эти три границы устойчивости можно изобразить графически в пространстве параметров K, T_1, T_2 и найти *области устойчивости* системы.

Найдем сначала область устойчивости системы по одному параметру K (общий коэффициент усиления разомкнутой цепи). Пространство параметров здесь одна прямая линия, а границы устойчивости – точки на ней $K = 0$ и $K = K_{\text{гр}}$ (рис. 4.24). Область устойчивости согласно (4.26) лежит между этими точками.

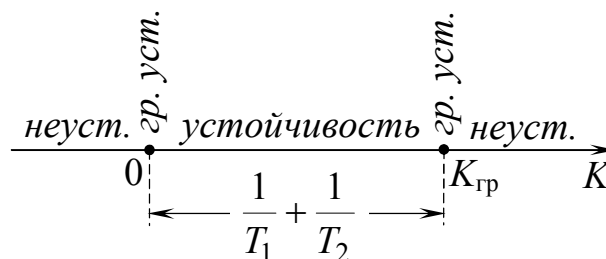


Рис. 4.24. Области устойчивости и неустойчивости по одному параметру K к примеру 4.10

Те же границы устойчивости системы можно построить на плоскости двух параметров, например, K, T_1 . Первая граница ($K = 0$) лежит на оси T_1 (рис. 4.25). Вторая граница $1/T_1 = K - 1/T_2$ – имеет вид гиперболы с асимптотами $T_1 = 0$ и $K = 1/T_2$. Третья граница ($T_1 = 0$) совпадает с осью K . Как видно, при другом значении параметра T_2 вторая граница устойчивости смещается и области устойчивости и неустойчивости (рис. 4.25) изменяются.

Штриховка границ делается в сторону области устойчивости.

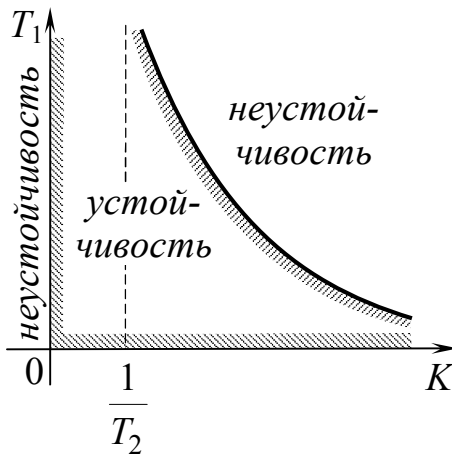


Рис. 4.25. Области устойчивости и неустойчивости по двум параметрам K и T_1 к примеру 4.9

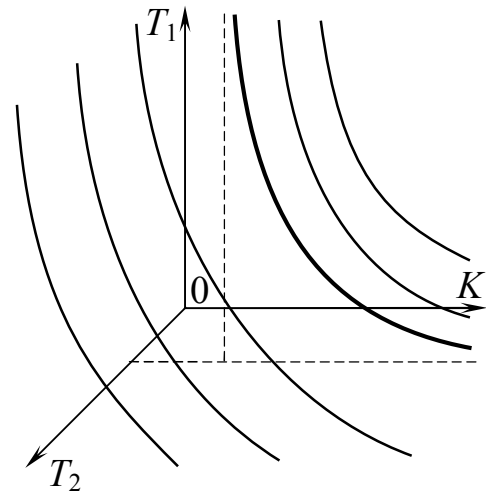


Рис. 4.26. Области устойчивости по трем параметрам

Как видим, при увеличении постоянных времени T_1 , T_2 область устойчивости сужается. Отрицательно влияет на устойчивость также и увеличение коэффициента усиления K . При любых заданных T_1 и T_2 существует свое значение $K_{гр}$ (рис. 4.24), после чего система становится неустойчивой. Это очень важное обстоятельство, так как мы знаем (см. главу 3), что для повышения точности регулирования необходимо увеличивать K . Тут выявляется *противоречие* между требованием точности (увеличение K) и устойчивости (ограничение K).

Далее можно построить область устойчивости и в пространстве трех параметров K , T_1 , T_2 (рис. 4.26). Там жирной линией обозначена граница устойчивости, перенесенная с рис. 4.25. Границами устойчивости здесь являются три координатные плоскости и криволинейная поверхность, сечениями которой в вертикальных плоскостях, параллельных KOT_1 , и в горизонтальных, параллельных KOT_2 , будут гиперболы.

Пример 4.11. Для системы, рассмотренной в предыдущем примере, найдем границы устойчивости по критерию Михайлова.

В примере 4.2 были найдены выражения для годографа Михайлова

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

и его действительной и мнимой частей

$$X(\omega) = K - (T_1 + T_2)\omega^2, \quad Y(\omega) = \omega - T_1T_2\omega^3.$$

Отсюда для границы устойчивости согласно (4.20) имеем

$$K - (T_1 + T_2)\omega_0^2 = 0, \quad \omega_0(1 - T_1T_2\omega_0^2) = 0.$$

Из второго уравнения получаем два значения частоты на границе устойчивости

$$\omega_0 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{1}{T_1T_2}.$$

Тогда из первого уравнения находим соответственно

$$K = 0 \text{ и } K = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Для бесконечно удаленного корня ($\omega_0 = \infty$) из предыдущего выражения получаем

$$T_1 T_2 = 0.$$

Эти результаты совпадают с тем, что было получено в примере по критерию Гурвица, где были изображены и области устойчивости, которые получаются, естественно, такими же (рис. 4.24-4.26) и по критерию устойчивости Михайлова.

Понятие о D -разбиении. Чаще всего на практике применяют наиболее общий метод построения областей устойчивости, который был предложен Ю.И. Наймарком и назван им *методом D -разбиения*.

Метод D -разбиения состоит в том, что для определения границ устойчивости системы аналогично методу Михайлова в характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4.27)$$

подставляется чисто мнимое значение $\lambda = j\omega$, причем ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При ω конечном таким образом определяется **колебательная граница устойчивости**, а при частных значениях $\omega = 0$ и $\omega = \pm\infty$ – остальные границы (соответствующие значениям $a_n = 0$ и $a_0 = 0$).

Однако $\lambda = j\omega$ может быть не только на границе устойчивости. Чтобы получить границу устойчивости, нужно обеспечить еще условие отсутствия в данном уравнении корней с положительной вещественной частью (иначе система будет не на границе, а попросту неустойчива).

Рассмотрим метод D -разбиения сначала для определения границы устойчивости по одному параметру, а затем – по двум параметрам.

Пусть некоторый параметр K , влияние которого на устойчивость надо выяснить, входит в характеристическое уравнение (4.27) следующим образом:

$$D(\lambda) = A(\lambda) + KB(\lambda) = 0. \quad (4.28)$$

Тогда подстановка $\lambda = j\omega$ дает

$$K = -\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}. \quad (4.29)$$

Границей устойчивости будет вещественное значение правой части этого равенства. Чтобы его найти, строим на комплексной плоскости (K, y) годограф функции

$$-\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}$$

при $-\infty \leq \omega \leq 0$ и затем $0 \leq \omega \leq \infty$, как показано, например, на рис. 4.27.

Штриховка кривой производится слева, если идти в направлении увеличения ω . Точки пересечения годографа с вещественной осью K определяют границы устойчивости. В данном случае (рис. 4.27) область устойчивости будет

$$0 < K < K_{гр}.$$

По рис. 4.27 можно определить сколько корней m характеристического уравнения системы $D(\lambda) = 0$ лежит справа от мнимой оси плоскости корней λ . Если граница получена пересечением двух кривых (как, например, точка $K_{гр}$), то за ней ($K > K_{гр}$) будет $m = 2$, т.е. пара комплексных корней с положительной вещественной частью. Если же на границе ось K пересекается одной кривой (как, например, в точке $K = 0$), то за ней ($K < 0$) будет $m = 1$ – положительный вещественный корень.

Следовательно, граница устойчивости $K = K_{гр}$ колебательная, а граница $K = 0$ апериодическая.

В линейных задачах изменяемый параметр является вещественным (коэффициент усиления, постоянная времени) и практический интерес имеет область D -разбиения, прилегающая к оси x . Рассмотрение всей области комплексного параметра представляет интерес для нелинейных задач, где может быть использован полученный результат.

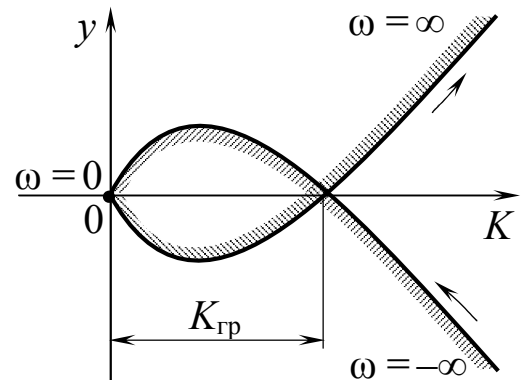


Рис. 4.27. Границы D -разбиения по одному параметру

Области, на которые разбивается пространство параметров границей D -разбиения, обозначаются через $d(l)$, где l – число корней уравнения (4.27) в правой полуплоскости. Среди них лишь одна $d(0)$ является областью устойчивости.

Пример 4.12. Пусть дано характеристическое уравнение системы из трех инерционных звеньев

$$(1 + \lambda T_1)(1 + \lambda T_2)(1 + \lambda T_3) + K = 0, \quad (4.30)$$

где T_1, T_2, T_3 – заданные постоянные времени; K – общий коэффициент усиления.

Для решения задачи построим границу D -разбиения в плоскости комплексного параметра K и будем интересоваться лишь разбиением действительной оси, т.е. действительными значениями K .

Из (4.30) следует, что граница D -разбиения соответствует уравнению

$$K = x + jy = -(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3). \quad (4.31)$$

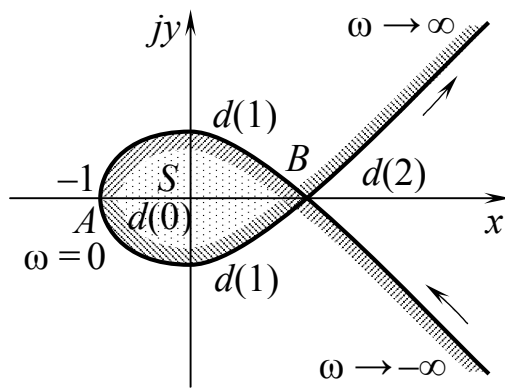


Рис. 4.28. Граница D -разбиения для примера 4.12

Граница D -разбиения согласно (4.31) представлена на рис. 4.28. Претендентом на область устойчивости является область S , к которой направлена штриховка границы D -разбиения. Можно показать, что эта область является не только претендентом, но и самой областью устойчивости. Действительно, точка $(0, j0)$, т.е. $K = 0$, лежащая в области S , принадлежит области устойчивости $d(0)$, ибо характеристическое уравнение (4.30) превращается в уравнение

$$(1 + \lambda T_1)(1 + \lambda T_2)(1 + \lambda T_3) = 0,$$

все три корня которого лежат в левой полуплоскости. Таким образом, система устойчива, если действительные значения K изменяются в пределах, определяемых отрезком AB . Предельное значение K определяется точкой B . Система устойчива и при отрицательных значениях K , если $K > -1$.

Чтобы найти $K_{гр}$ (точка B), следует определить значение ω_0 , при котором

$$y(\omega_0) = 0; \quad (4.32)$$

тогда

$$K_{гр} = x(\omega_0). \quad (4.33)$$

Проводя вычисления, из (4.31) получим

$$K_{гр} = (1 + \tau_2 + \tau_3)(1 + 1/\tau_2 + 1/\tau_3) - 1, \quad (4.34)$$

где $\tau_2 = T_2/T_1, \tau_3 = T_3/T_1$.

На рис. 4.28 показаны области $d(0), d(1), d(2)$. Область $d(3)$ в данном случае отсутствует; это значит, что при положительных значениях T_1, T_2

и любом K невозможно, чтобы все три корня уравнения (4.30) находились в правой полуплоскости.

Аналогично, хотя и более сложно, выполняется D -разбиение по двум параметрам, входящим линейно в характеристическое уравнение (параметры x и y).

Для построения области устойчивости на плоскости двух каких-нибудь параметров K и T после подстановки $\lambda = j\omega$ в характеристическое уравнение получаем

$$D(j\omega) = X(K, T, \omega) + jY(K, T, \omega) = 0,$$

или

$$X(K, T, \omega) = 0, \quad Y(K, T, \omega) = 0,$$

откуда

$$K = f_1(\omega), \quad T = f_2(\omega).$$

Подставляя в полученные выражения разные значения ω сначала $-\infty \leq \omega \leq 0$, а затем $0 \leq \omega \leq \infty$, строим по точкам кривые на плоскости (K, T) . Штриховка каждой кривой, если идти в сторону увеличения ω , делается слева, когда якобиан, т.е. определитель вида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial K} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial K} \frac{\partial Y}{\partial T} - \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{\partial X}{\partial T}$$

положителен. В обратном случае штриховка кривой производится справа. Если при $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ кривая пробегается дважды, то и штриховка на нее наносится дважды (см. одну из кривых на рис. 4.29). Такие кривые соответствуют колебательной границе устойчивости (ω – частота колебаний), на которой пара комплексных корней меняет знак вещественной части с минуса на плюс.

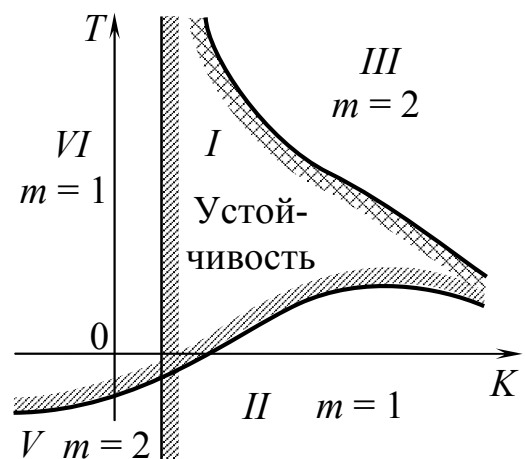


Рис. 4.29. Границы D -разбиения по двум параметрам

Значениям $\omega = 0$ и $\omega = \pm\infty$ соответствуют особые кривые (чаще всего прямые), вдоль которых ω сохраняет постоянное значение (0 или ∞). Их штриховка (однократная) согласуется с предыдущей, как показано на рис. 4.29. Кривые с однократной штриховкой соответствуют переходу вещественного корня с отрицательного на положительный через нуль или бесконечность.

Без доказательства приведем следующее правило. В той области, куда направлена штриховка, будет меньше корней с положительной вещественной частью. Поэтому для нахождения области устойчивости среди кривых D -разбиения надо искать такую, куда устремлены все штриховки. На рис. 4.29 такой областью является область I . Чтобы в этом окончательно убедиться, нужно для какой-нибудь одной точки этой области (т.е. для одной пары конкретных значений K и T) проверить выполнение критерия устойчивости (Михайлова или Гурвица).

Тогда в области I число корней с положительной вещественной частью будет $m = 0$. В области II получим $m = 1$; в III области $m = 2$, в IV области $m = 1$, а в V области $m = 2$.

Для рассматривавшегося выше примера 4.10 характеристическое уравнение системы имело вид

$$D(\lambda) = T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + K.$$

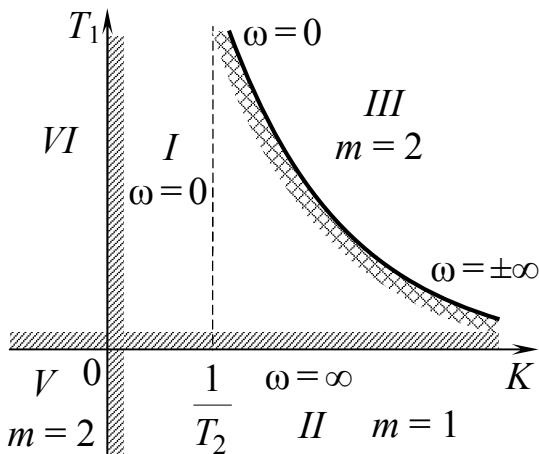
После подстановки $\lambda = j\omega$ получим

$$X = K - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0,$$

$$Y = \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0.$$

Будем искать область устойчивости на плоскости параметров (K, T_1) . Из написанных уравнений находим (при $\omega \neq 0$)

$$T_1 = \frac{1}{T_2 \omega^2}, \quad K = \frac{1}{T_2} + T_2 \omega^2.$$



При изменении $0 \leq \omega \leq \infty$ мы идем по гиперболе (рис. 4.30); при $-\infty \leq \omega \leq 0$ снова переходим по ней же. Для определения направления штриховки запишем якобиан

Рис. 4.30. Границы D -разбиения по двум параметрам для примера 4.10

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial K} & \frac{\partial X}{\partial T_1} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} & \frac{\partial Y}{\partial T_1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & -\omega^2 \\ 0 & -T_2\omega^3 \end{array} \right| = \\ & = -T_2\omega^3 = \begin{cases} < 0 & \text{при } \omega > 0, \\ > 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В первом случае штриховка справа, во втором – слева. На гиперболе штриховки накладываются друг на друга (рис. 4.30).

Кроме этой гиперболы получаем две особые прямые:

$$T_1 = 0 \text{ при } \omega = \infty \text{ и } K = 0 \text{ при } \omega = 0$$

(последнее вытекает непосредственно из уравнения $X = 0$, написанного выше).

Область I – область устойчивости. В области II $m = 1$, в области III $m = 2$, в области IV $m = 1$, в области V $m = 2$.

Большие скорости вычислений и наличие развитого математического обеспечения ЭВМ позволяют решать задачи D -разбиения простым перебором большого числа точек на плоскости параметров и определением числа корней в правой полуплоскости на основе критерия Рауса.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

59. Как формулируется критерий устойчивости Гурвица? Почему он называется алгебраическим?
60. Как строится матрица Гурвица?
61. Как формулируется принцип аргумента?
62. Что такое кривая (годограф) Михайлова?
63. Как формулируется критерий устойчивости Михайлова? Почему он называется частотным?
64. Как выглядит кривая Михайлова на границе устойчивости системы?
65. Как формулируется критерий устойчивости Найквиста для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии?
66. Как формулируется критерий устойчивости Найквиста для системы, нейтральной в разомкнутом состоянии?
67. Как формулируется критерий устойчивости Найквиста для системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии?
68. Каковы особенности применения критерия устойчивости Найквиста в случае наличия пары чисто мнимых полюсов в передаточной функции разомкнутой системы?
69. Что такое запас устойчивости по фазе и запас устойчивости по амплитуде?
70. Как определяется запас устойчивости по фазе и амплитуде по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы?
71. Как строятся области устойчивости и неустойчивости по одному параметру, по двум параметрам?
72. В чем заключается метод D -разбиения по одному параметру, по двум параметрам?

ГЛАВА 5. ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

5.1. Оценка качества переходного процесса при ступенчатом воздействии

Устойчивость системы обеспечивает затухание переходных процессов с течением времени, т. е. обеспечивает принципиальную возможность прихода системы в некоторое установившееся состояние при любом внешнем возмущении. Однако кроме устойчивости требуется, во-первых, чтобы это установившееся состояние было достаточно близко к заданному и, во-вторых, чтобы затухание переходного процесса было достаточно быстрым, а отклонения (колебания) при этом были бы невелики.

Поэтому после обеспечения устойчивости системы нужно позаботиться о требуемом качестве процесса управления, в понятие которого входят, в частности:

- 1) точность системы в установившемся состоянии,
- 2) качество переходного процесса.

Вообще говоря, в понятие качества системы может входить и ряд других показателей.

Методы определения точности системы были изучены выше в главе 3 (статические и скоростные ошибки, точность при гармоническом воздействии, коэффициенты ошибок при произвольном внешнем воздействии).

Показатели качества, определяемые непосредственно по кривой переходного процесса, называют **прямыми оценками качества**. Кривая переходного процесса может быть получена теоретически или экспериментально.

В тех случаях, когда расчет переходного процесса связан с большими трудностями, используют **косвенные оценки качества**. Например, к косвенным оценкам качества можно отнести запасы устойчивости по фазе и по амплитуде, рассмотренные в главе 3.

Переходный процесс в системе зависит не только от свойств САУ, но и от характера внешнего воздействия, которое в общем случае может быть сложной функцией времени. Поведение сис-

темы рассматривают при следующих типовых воздействиях: единичной ступенчатой функции $1(t)$, импульсной $\delta(t)$ и гармонической функций. **Прямые оценки качества** получают по кривой переходной характеристики $h(t)$, т. е. при воздействии единичной ступенчатой функции

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

и нулевых начальных условиях.

Эту характеристику обычно строят для выходной величины, а иногда для ошибки регулирования $e(t)$. К прямым оценкам качества относят:

1. Время регулирования t_p – минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta,$$

где Δ – постоянная величина, значение которой нужно оговаривать (задается величина Δ в процентах от установившегося значения выходной величины $h_{уст}$).

2. Перерегулирование σ – максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{уст}}{h_{уст}} 100,$$

где $h_{\max 1}$ – значение первого максимума.

Допустимое значение перерегулирования в каждом конкретном случае будет подсказано опытом эксплуатации системы, обычно $\sigma = 10-30\%$, но в некоторых случаях допускается и до 70% . Иногда перерегулирование недопустимо совсем.

3. Частоту колебаний $\omega = 2\pi/T$, где T – период колебаний для колебательных переходных характеристик.

4. Число колебаний n , которое имеет переходная характеристика $h(t)$ за время регулирования t_p .

При проектировании систем чаще всего допускают $n = 1-2$, а иногда и до $3-4$, но в некоторых случаях колебания в системе недопустимы.

5. Время достижения первого максимума t_{\max} .

6. Время нарастания переходного процесса $t_{\text{н}}$ – абсциссу первой точки пересечения кривой переходной характеристики $h(t)$ с уровнем установившегося значения $h_{\text{уст}}$.

8. Декремент затухания d_3 , равный отношению модулей двух смежных перегулирований:

$$d_3 = \frac{|h_{\max 1} - h_{\text{уст}}|}{|h_{\max 2} - h_{\text{уст}}|}.$$

Перечисленные показатели качества могут быть дополнены другими, но это обусловлено спецификой конкретной системы.

Определение приведенных выше прямых оценок качества

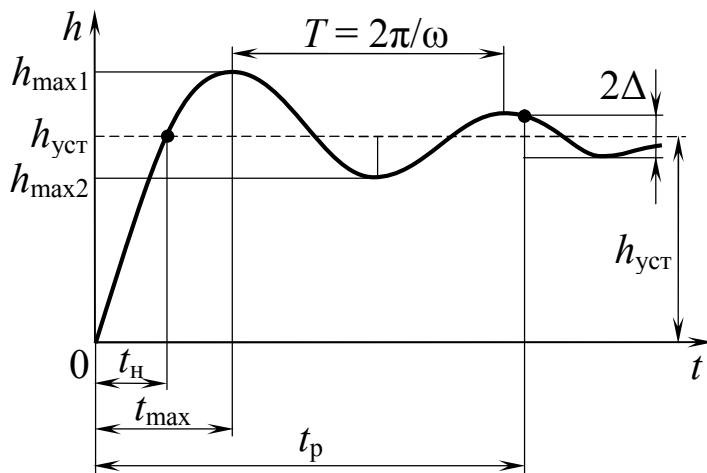


Рис. 5.1. Колебательная переходная характеристика

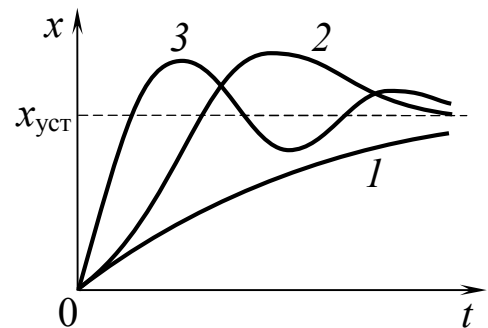


Рис. 5.2. Разновидности переходных характеристик: монотонная (1), апериодическая (2) и колебательная (3)

переходного процесса проиллюстрировано на рис. 5.1.

Переходные процессы, возникающие в системах при скачкообразных воздействиях, принято делить на три группы: монотонные, апериодические и колебательные. У монотонных процессов первая производная выходной величины $x(t)$ не меняет знак (кривая 1 на рис. 5.2), у апериодических знак производной $x(t)$ меняется не более одного раза (кривая 2 на рис. 5.2), а у колебательных – первая производная $x(t)$ меняет свой знак периодически (теоретически бесконечное число раз) (кривая 3 на рис. 5.2).

Нужно отметить, что в настоящее время при бурном развитии вычислительной техники трудности, связанные с расчетом переходных процессов и выбором возможных вариаций параметров системы, существенно уменьшаются, поэтому роль прямых оценок качества при проектировании САУ возрастает.

5.2. Оценка качества регулирования при гармонических воздействиях

При гармонических воздействиях качество системы принято оценивать по амплитудно-фазочастотной, амплитудно-частотной, фазочастотной и логарифмическим частотным характеристикам. Для оценки качества переходного процесса используются следующие величины: показатель колебательности M , резонансная (собственная) частота ω_p , полоса пропускания системы ω_0 , частота среза ω_{cp} , запасы устойчивости по модулю и по фазе.

Показатель колебательности M – это отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики $A_{3,max}(\omega)$ замкнутой системы к ее значению при $\omega = 0$ (рис. 5.3, а):

$$M = A_{3,max}(\omega)/A_3(0). \quad (5.1)$$

При $A_3(0) = 1$ показатель колебательности $M = A_{3,max}(\omega)$.

Показатель колебательности характеризует склонность системы к колебаниям. Чем выше M , тем менее качественна система при прочих равных условиях. Считается допустимым, если $1,1 \leq M \leq 1,5$.

Частоту ω_p , при которой амплитудно-частотная характеристика замкнутой САУ имеет максимум, называют **резонансной частотой системы** (рис. 5.3, а); на этой частоте гармонические колебания проходят через систему с наибольшим усилением.

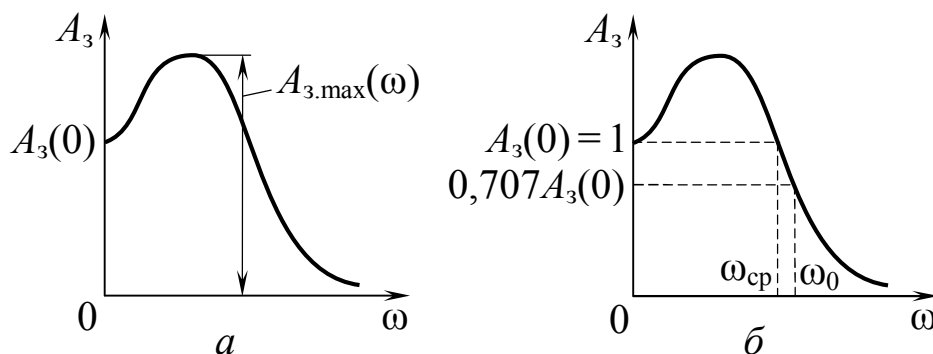


Рис. 5.3. АЧХ замкнутой системы для пояснения показателя колебательности (а) и полосы пропускания (б)

Полоса пропускания системы (рис. 5.3, б) – это интервал частот от $\omega = 0$ до ω_0 , при которой выполняется условие

$$A_3(\omega_0) \leq A_3(0)/\sqrt{2} \quad (5.2)$$

или при $A_3(0) = 1$ величина $A_3(\omega_0) \leq 1/\sqrt{2}$. Полоса пропускания не должна быть слишком широкой, иначе система будет воспроизводить высокочастотные помехи.

Частота среза $\omega_{\text{ср}}$ – частота, при которой амплитудно-частотная характеристика системы принимает значение, равное 1, т. е. $A_3(\omega_{\text{ср}}) = 1$. Эта частота косвенно характеризует длительность переходного процесса. Время регулирования обратно пропорционально частоте среза:

$$t_p \cong (1 \dots 2)2\pi / \omega_{\text{ср}}. \quad (5.3)$$

Если переходный процесс имеет одно-два колебания, то время достижения переходной характеристикой первого максимума

$$t_{\text{max}} \cong \pi / \omega_{\text{ср}}. \quad (5.4)$$

Склонность системы к колебаниям характеризуется значениями ее запасов устойчивости по модулю и по фазе, определение которых дано в предыдущей главе. В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде колеблется в пределах от 6 до 20 дБ, а запас по фазе – от 30 до 60°.

Так как рассмотренные выше показатели косвенно определяют быстродействие, перерегулирование и т. п., то их используют и для расчета систем, находящихся под воздействием непериодических возмущений.

5.3. Корневые оценки качества

Корневыми оценками называются такие, которые основываются на расположении корней характеристического уравнения замкнутой системы, т. е. полюсов передаточной функции замкнутой системы, а также и нулей этой передаточной функции.

Степень устойчивости – расстояние η от мнимой оси до ближайшего корня на плоскости корней λ характеристического уравнения замкнутой системы (рис. 5.4). Если ближайшим является вещественный корень (рис. 5.4, а), то ему соответствует апериодическая составляющая решения переходного процесса

$$C_1 e^{\eta t},$$

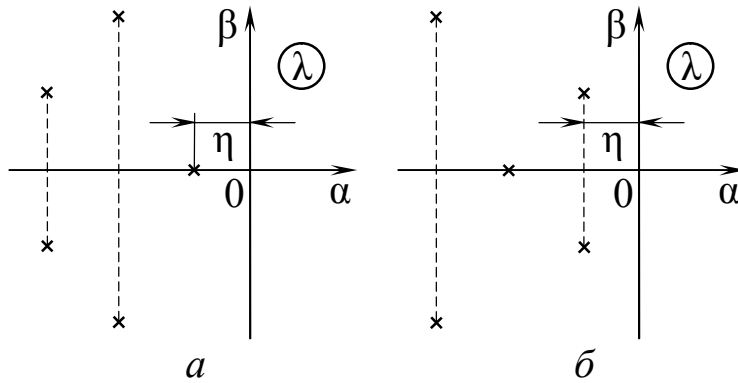


Рис. 5.4. Расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы для случаев, когда ближайшим к мнимой оси является вещественный корень (а), пара комплексно-сопряженных корней (б)

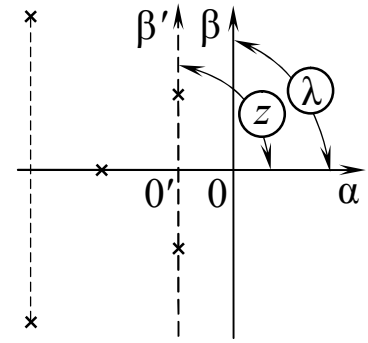


Рис. 5.5. Преобразование переменной для определения η системы

(апериодическая степень устойчивости η). Время ее затухания при $\Delta = 5\%$

$$t_p = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \approx \frac{3}{\eta} \quad (5.5)$$

характеризует общую длительность переходного процесса, так как все члены решения, соответствующие остальным корням, затухают быстрее.

Если же ближайшей к мнимой оси окажется пара комплексных корней (рис. 5.4, б), то доминирующая составляющая решения переходного процесса

$$C_1 e^{-\eta t} \sin(\beta_1 t + C_2)$$

будет колебательной (колебательная степень устойчивости η), причем оценка длительности переходного процесса t_p остается прежней (5.5).

Определяется значение степени устойчивости следующим образом. Вводится новая комплексная переменная $z = \lambda + \eta$ (рис. 5.5). Тогда на плоскости z мнимая ось β' пройдет через ближайшие корни, т. е. система, описываемая характеристическим уравнением относительно z , должна находиться на границе устойчивости.

Таким образом, если задано характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (5.6)$$

то подставив $\lambda = z - \eta$, а именно

$$a_0 (z - \eta)^n + \dots + a_{n-1} (z - \eta) + a_n = 0,$$

получим новое уравнение, которое называется смещенным, в виде

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0, \quad (5.7)$$

где коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n являются функциями η ,

$$A_i = \frac{1}{(n-i)!} \left. \frac{d^{n-i} D}{d\lambda^{n-i}} \right|_{\lambda=-\eta}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.8)$$

что вытекает из представления выражения (5.7) как результата разложения функции $D(\lambda)$ (5.6) при $\lambda = z - \eta$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} D(z - \eta) &= D(-\eta) + \left. \frac{dD(z - \eta)}{dz} \right|_{z=0} z + \left. \frac{d^2 D(z - \eta)}{dz^2} \right|_{z=0} z^2 + \dots + \\ &+ \left. \frac{d^n D(z - \lambda)}{dz^n} \right|_{z=0} = D(-\eta) + \left. \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=-\eta} z + \left. \frac{d^2 D(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=-\eta} z^2 + \dots + \\ &+ \left. \frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=-\eta} z^n, \end{aligned}$$

откуда следует равенство (5.8).

Условие нахождения на мнимой оси одного вещественного или пары комплексно сопряженных корней уравнения (5.7) соответствует нахождению системы, описываемой характеристическим уравнением (5.7), на границе устойчивости. Это соответствует обращению в нуль старшего определителя Гурвица:

$$\Delta_n = A_n \Delta_{n-1} = 0. \quad (5.9)$$

Условие (5.9) дает уравнение, по которому, зная коэффициенты уравнения (5.6), можно определить η или решить обратную задачу.

Если в уравнении (5.7) окажется $A_n = 0$, то на мнимой оси окажется нулевой корень, а если $A_n \neq 0$, то паре комплексно сопряженных корней.

Итак, условия расположения корней уравнения (5.7) на мнимой оси имеют вид

$$A_n(\eta) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{n-1}(\eta) = 0, \quad (5.10)$$

откуда и определяется величина η .

Колебательностью переходного процесса называется величина

$$\mu = |\beta/\alpha|, \quad (5.11)$$

где α и β – вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения. Именно эта величина характеризует быстроту затухания колебаний за каждый период. В самом деле, паре комплексных корней $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ соответствует составляющая решения переходного процесса

$$C_1 e^{-|\alpha|t} \sin(\beta t + C_2).$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi/\beta.$$

Через один период амплитуда $C_1 e^{-|\alpha|t}$ уменьшается до значения

$$C_1 e^{-|\alpha|\left(t + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-|\alpha|t} e^{-2\pi\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|}.$$

Следовательно, чем больше величина $\mu = |\beta/\alpha|$, названная колебательностью, тем слабее будет затухание колебаний в переходном процессе. Линия $\mu = \text{const}$ образует центральный угол (рис. 5.6, а) на комплексной плоскости.

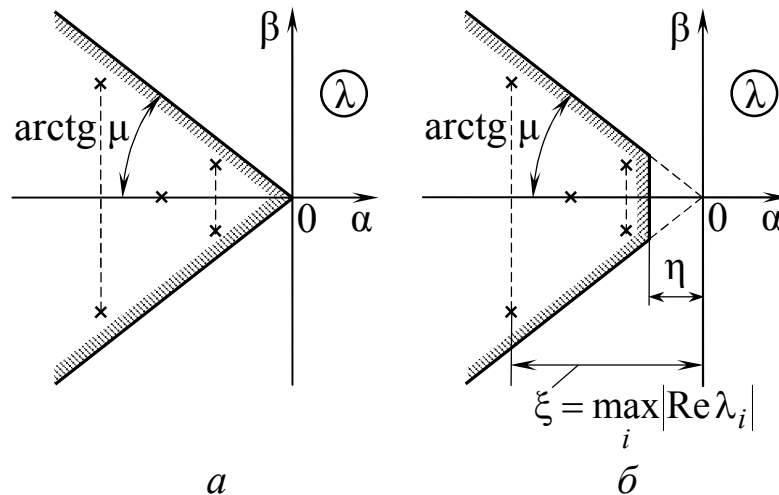


Рис. 5.6. Пояснение геометрического смысла колебательности μ (а), область, определенная требованиями к степени устойчивости и колебательности (б)

Суммарное требование определенных значений степени устойчивости η и колебательности μ приводит к области, изобра-

женной на рис. 5.6, б, внутри которой должны лежать все корни характеристического уравнения замкнутой системы.

Далее необходимо иметь в виду, что для определения качества переходного процесса при единичном скачке внешнего воздействия существенны не только корни характеристического уравнения, т. е. полюса, но также и **нули передаточной функции** замкнутой системы $\Phi(s)$. В самом деле, как мы знаем,

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{KN(s)}{D(s)},$$

где $D(s) = L(s) + KN(s)$.

Представим функцию $\Phi(s)$ в виде суммы простых дробей, разложив, кроме того, многочлен $N(s)$ на множители,

$$x(t) = \frac{KN(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{Kb_0(s_i - N_1)(s_i - N_2)\dots(s_i - N_m)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t}, \quad (5.12)$$

где $s_i = \lambda_i$ полюса $\Phi(s)$, т. е. корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$; через N_1, N_2, \dots, N_m обозначены нули многочлена $N(s)$.

Отсюда видно, что амплитуды отклонений в переходном процессе, стоящие под знаком суммы, будут тем меньше, чем ближе расположены нули N_j , т. е. корни многочлена $N(s)$, к полюсам s_i , т. е. к корням характеристического уравнения. Именно в этом случае значения $N(s_i)$ будут малы. Это соответствует, например, рис. 5.7, где нули обозначены кружочками. Заметим, что нули передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$ совпадают с нулями передаточной функции разомкнутой цепи $W(s)$, так как

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}, \quad W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)},$$

а полюса $\Phi(s)$ и $W(s)$ существенно отличаются друг от друга.

Отсюда вытекает, что для уменьшения амплитуд отклонений в переходном процессе желательно, чтобы нули передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$ располагались вблизи ее полюсов.

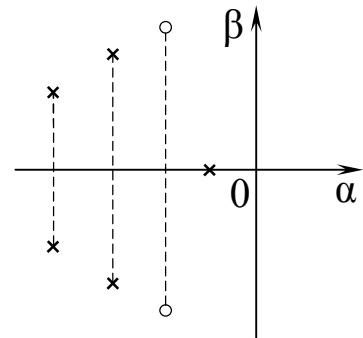


Рис. 5.7. Пример желаемого взаимного расположения полюсов и нулей системы

Примером корневых оценок качества переходного процесса в системах третьего порядка является *диаграмма Вышнеградского* (дана в его работе 1876 г., положившей начало развитию теории автоматического регулирования) [1].

Характеристическое уравнение системы третьего порядка

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (5.13)$$

приводится к нормированному виду

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (5.14)$$

где

$$q = \lambda \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}, \quad A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}. \quad (5.15)$$

Параметры Вышнеградского A и B представляют, следовательно, определенные комбинации реальных параметров системы, входящих в коэффициенты характеристического уравнения.

На плоскости параметров A, B граница устойчивости выразится зависимостью

$$AB = 1 \quad (5.16)$$

(гипербола). Область устойчивости

$$AB > 1$$

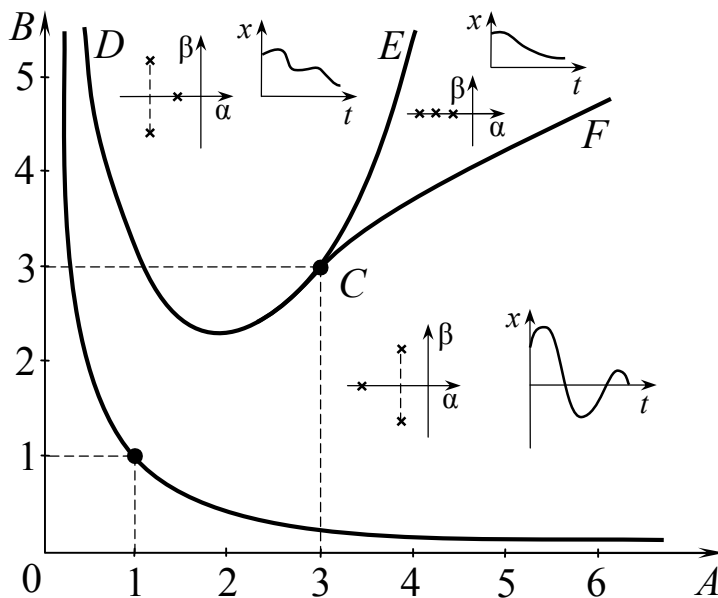


Рис. 5.8. Диаграмма Вышнеградского

разбивается на три подобласти (рис. 5.8) с различным расположением корней характеристического уравнения и соответственно – очертаний переходного процесса. При этом граничные линии CE и CF находятся приравниванием нулю дискриминанта формулы Кардана (решения кубического уравнения) в виде

$$A^2 B^2 - 4(A^2 + B^2) + 18AB - 27 = 0,$$

а линия CD – из равенства вещественных частей всех корней –

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0, \quad A < 3,$$

В точке $C(3, 3)$ все три корня вещественны и равны -1 .

Позднее на диаграмму Вишнеградского были нанесены линии равных значений степени устойчивости η и колебательности μ .

При определении *степени устойчивости* смещенное уравнение для нормированного характеристического уравнения (5.14) будет

$$z^3 = A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0,$$

где согласно формулам (5.8) при $D(\eta) = q^3 + Aq^2 + Bq + 1$ имеем

$$A_3 = D(-\eta) = -\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1,$$

$$A_2 = \left. \frac{dD}{dq} \right|_{q=-\eta} = 3q^2 + 2Aq + B \Big|_{q=-\eta} = 3\eta^2 - 2A\eta + B,$$

$$A_1 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 D}{dq^2} \right|_{q=-\eta} = \frac{1}{2} (6q + 2A) \Big|_{q=-\eta} = -3\eta + A,$$

Два условия (5.10) принимают соответственно вид

$$-\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1 = 0, \quad (5.17)$$

$$(-3\eta + A)(3\eta^2 - 2A\eta + B) + \eta^3 - A\eta^2 + B\eta - 1 = 0, \quad (5.18)$$

Полагая $\eta = \text{const}$, нанесем линии равных значений η . При этом согласно уравнению (5.17) получим для разных конкрет-

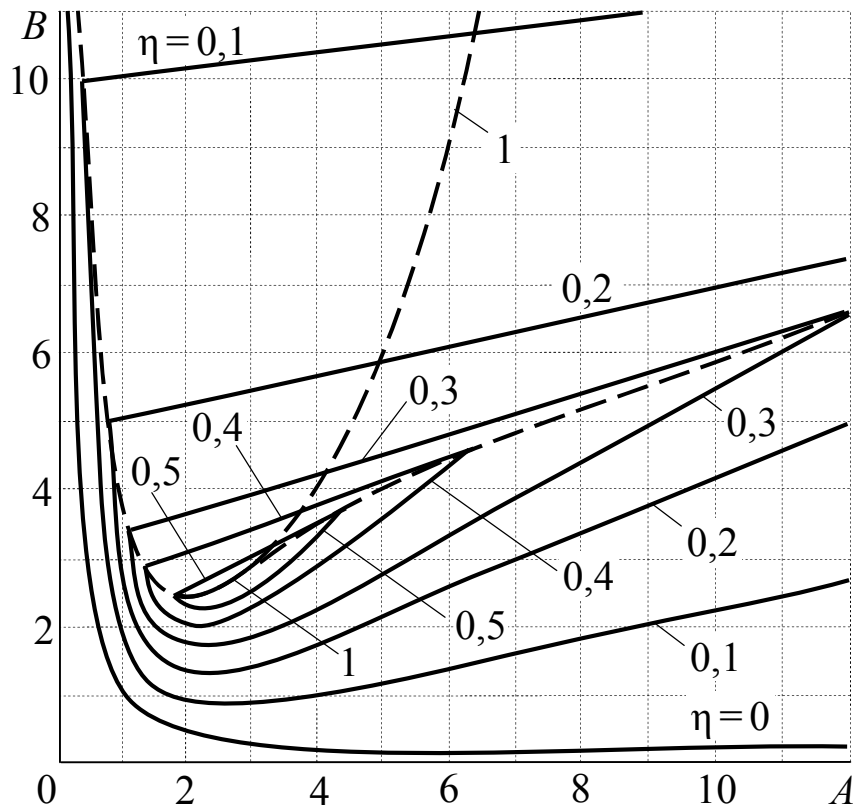


Рис. 5.9. Линии равных значений степени устойчивости

ных значений η прямые линии, а согласно уравнениям (5.18) – кривые (рис. 5.9).

Для определения линий равных значений колебательности системы третьего порядка с характеристическим уравнением (5.14), когда корни его равны

$$q_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\beta_1, \quad q_3 = -\alpha_2 \quad (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0),$$

имея в виду, что $\mu = \beta_1/\alpha_1$, по формулам Виета запишем

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = A, \quad 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2(1 + \mu^2) = B, \quad \alpha_1^2\alpha_2(1 + \mu^2) = 1.$$

Исключая α_1 и α_2 и обозначив $d_3 = 1 + \mu^2$, получим уравнение

$$4d_3^2(A^3 + B^3) - d_3^3A^2B^2 + (2d_3^3 - 4d_3^2 - 16d_3)AB - d_3^3 + 12d_3^2 - 48d_3 + 64 = 0, \quad (5.19)$$

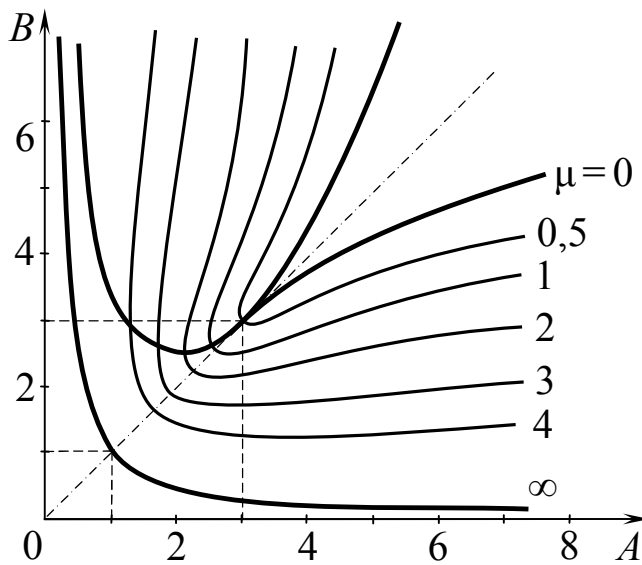


Рис. 5.10. Линии равных значений колебательности

которое позволяет построить на поле диаграммы Вышнеградского AB линии равных значений $\mu^2 = d_3 - 1$ (рис. 5.10) в областях, где имеются комплексные корни.

Если нам требуется в системе третьего порядка выбрать параметры так, чтобы получать заданное качество переходного процесса по показателям η и μ , мы выбираем на рис. 5.9 и 5.10 соответствующую точку. Найдя таким образом значения A и B , пользуемся затем формулами (5.15) для подбора параметров системы.

При известных параметрах системы можно определять значение колебательности μ (задача анализа колебательности) или решать обратную задачу – задачу синтеза САУ по заданной колебательности. Для этого в характеристическое уравнение системы вводится замена $\lambda = jze^{-j\varphi_M}$, равноценная повороту мнимой оси на угол $(\pi/2 - \varphi_M)$, при этом пара сопряженных комплексных корней окажется на мнимой оси, а фиктивная система – на границе устойчивости. Колебательность μ является оценкой переходного процесса сверху, при увеличении μ возрастает число колебаний n за время регулирования и возрастает перерегулирова-

ние. Реальный переходный процесс может иметь значительно лучшее качество.

Запишем смещенное характеристическое уравнение

$$B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_{n-1} z + B_n = 0, \quad (5.20)$$

где

$$B_i = j^{n-i} e^{-i(n-i)\varphi_M} a_i.$$

В уравнении (5.20) часть коэффициентов – комплексные числа.

Так как фиктивная система находится на границе устойчивости, то уравнение (5.20) имеет пару сопряженных мнимых корней $s_i = \pm j\beta_i = \pm j\omega_i$.

Если в (5.20) подставить $j\omega$ вместо z и разделить смещенный характеристический полином на мнимую Y и действительную X части, то их можно поочередно приравнять нулю, получив при этом систему двух уравнений

$$X(\varphi_M, \omega_i) = 0; \quad Y(\varphi_M, \omega_i) = 0.$$

Исключив из этой системы ω_i , получим искомое значение φ_M и $\mu = \operatorname{tg} \varphi_M$.

Эту задачу можно решать, используя свойства корней алгебраических уравнений по формулам Виета.

Оценка прямых показателей качества переходного процесса – времени регулирования t_p и перерегулирования σ (см. § 5.1) – по известным η , ξ и μ для любого распределения корней и любых начальных условий пока не найдена. Но для определенных классов распределения корней и начальных условий можно построить две кривые: мажоранту и миноранту, которые ограничивают кривую переходного процесса сверху и снизу:

$$u(t) \leq x(t) \leq v(t),$$

где $u(t)$ – миноранта, а $v(t)$ – мажоранта [1].

5.4. Метод корневого годографа

Корневым годографом называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы (например, общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи данной системы).

Используя метод корневого годографа, можно решать следующие задачи [1]: построение годографов полюсов передаточной функции замкнутой системы при изменении одного из ее параметров; оценки влияния параметров системы, появляющихся при ее усложнении; качественной и количественной оценки реакции системы на типовой сигнал при изменении значения параметра системы; синтеза корректирующих элементов системы.

Для непрерывных линейных систем существует несколько методов построения корневых годографов, в частности методы Ивенса, Теодорчика-Бендрикова и Удермана. Наиболее трудоемким является метод Ивенса. Используя этот метод, можно оценить несколько вариантов с точностью 3-5 %, что удобно на первом этапе проектирования. Метод Теодорчика-Бендрикова позволяет проводить более детальные расчеты с использованием ЭВМ.

Рассмотрим метод Ивенса.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой цепи системы автоматического регулирования. Запишем ее в виде

$$KW(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} = \frac{K(b_0s^m + \dots + 1)}{C_0s^n + \dots + 1},$$

где K – общий коэффициент усиления разомкнутой цепи, а многочлены $N(s)$ и $L(s)$ имеют единичные коэффициенты при младших членах. Тогда главная передаточная функция замкнутой системы для регулируемой величины по задающему воздействию $g(t)$ имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} = \frac{KN(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (5.21)$$

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию определяется по формуле (3.24)

$$\Phi_f(s) = \frac{M(s)}{1 + KW(s)} = \frac{R(s)}{L(s) + KN(s)}, \quad (5.22)$$

где $R(s) = M(s)L(s)$ – многочлен.

Характеристическое уравнение замкнутой системы запишется соответственно в форме

$$D(s) = L(s) + KN(s) = 0, \quad (5.23)$$

а также в форме

$$1 + KW(s) = 0$$

или же

$$KW(s) = -1, \quad (5.24)$$

которая является **основным уравнением метода корневого годографа**.

Обозначим корни характеристического уравнения замкнутой системы через

$$s_1, s_2, \dots, s_n,$$

полюса передаточной функции разомкнутой системы

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

нули передаточной функции разомкнутой системы

$$N_1, N_2, \dots, N_m,$$

где $m < n$.

Очевидно, величины P_i и N_q , являющиеся нулями многочленов $L(s)$ и $N(s)$, не зависят от K .

Задача состоит в том, чтобы, зная расположение нулей N_1, \dots, N_m и полюсов P_1, \dots, P_n передаточной функции разомкнутой цепи $KW(s)$, найти корни характеристического уравнения s_1, \dots, s_n , как функции параметра K . Графически это и будет **корневой годограф** данной системы.

Корни характеристического уравнения (5.23) являются полюсами передаточной функции замкнутой системы. Что же касается нулей этой функции, то в случае исследования процесса при задающем воздействии согласно (5.21) нули замкнутой системы совпадают с **заданными нулями** разомкнутой цепи этой системы (5.20). В случае же исследования процесса при возмущающем воздействии согласно (5.22) нули замкнутой системы нужно искать отдельно как корни многочлена $R(s)$.

Преобразуем основное уравнение метода корневого годографа (5.24). Оно распадается на два: уравнение модулей

$$K|W(s)| = 1 \quad (5.25)$$

и уравнение фаз

$$\arg KW(s) = \pm(2\nu - 1)\pi, \text{ где } \nu = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Можно написать

$$KW(s) = KC \frac{(s - N_1)(s - N_2)\dots(s - N_m)}{(s - P_1)(s - P_2)\dots(s - P_n)}, \quad (5.27)$$

где $C = b_0/c_0$ – отношение коэффициентов при старших членах многочленов $N(s)$ и $L(s)$.

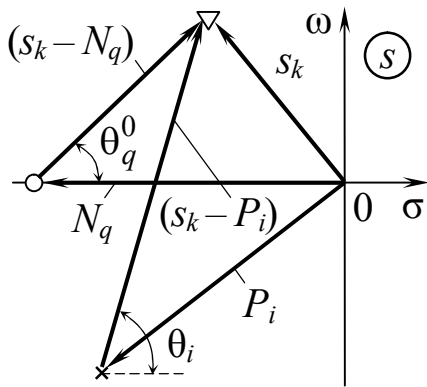


Рис. 5.11. Векторы, соответствующие комплексным числам $s - N_q$ и $s - P_i$

Подставим вместо s один из иско- мых корней характеристического уравнения замкнутой системы s_k . На плоскости $s = \sigma + j\omega$ (рис. 5.11) этот корень изобразится вектором s_k . Построим также векторы P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и N_q ($q = 1, 2, \dots, m$) полюсов и нулей функции $KW(s)$. Полюса P_i будем обозначать крестиками, нули N_q – кружочками, а корни s_k – треугольниками.

На рис. 5.11 показаны также векто- ры $s_k - N_q$ и $s_k - P_i$. Обозначим их аргументы соответственно через θ_q^0 и θ_i , а модули: l_q^0 и l_i .

Тогда **уравнение фаз** (5.26) на основании правил умножения комплексных чисел с учетом выражения (5.27) можно переписать в виде

$$\theta_1^0 + \theta_2^0 + \dots + \theta_m^0 - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = \pm(2\nu - 1)\pi$$

или

$$\sum_{q=1}^m \theta_q^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pm(2\nu - 1)\pi, \quad (5.28)$$

а **уравнение модулей** (5.25) – в виде

$$K = \frac{1}{C} \frac{l_1 l_2 \dots l_n}{l_1^0 l_2^0 \dots l_m^0}. \quad (5.29)$$

Уравнение фаз (5.28) не зависит от K . Поэтому путь решения задачи может быть такой. Сначала следует подобрать на плоскости s такое положение s_k , которое бы удовлетворяло уравне- нию фаз (5.28) при всех заданных P_i и N_q . Потом по уравнению модулей (5.29) нужно подсчитать, какому значению параметра K это соответствует. Таким путем постепенно можно построить весь корневой годограф.

В указанном виде процесс построения будет довольно гро- моздким. Однако он очень упрощается при использовании изла- гаемых ниже общих свойств корневого годографа.

1. Вследствие непрерывной зависимости решения характе- ристического уравнения от его коэффициентов, каждая ветвь

корневого годографа будет *непрерывной*, причем кривые, не лежащие на вещественной оси, будут попарно *симметричными* относительно оси абсцисс, так как комплексные корни всегда являются попарно сопряженными.

2. *Число ветвей* корневого годографа равно n – порядку системы, так как число корней равно степени n характеристического уравнения.

3. Ветви корневого годографа, *лежащие на вещественной оси*, помещаются только на таких ее отрезках, что справа от них расположено нечетное общее число вещественных нулей и полюсов. Доказывается это на основе уравнения фаз (5.28).

4. *Начала ветвей* корневого годографа (при $K = 0$) лежат в полюсах P_i передаточной функции разомкнутой цепи, так как при $K = 0$, согласно (5.21), знаменатель передаточной функции замкнутой системы совпадает со знаменателем $W(s)$; *концы одних ветвей* стремятся к нулям передаточной функции разомкнутой цепи (таких ветвей m – по числу нулей), а *концы остальных* ($n - m$) *ветвей* уходят в бесконечность.

5. *Асимптоты ветвей* корневого годографа, уходящих в бесконечность, образуют правильную $(n - m)$ -лучевую звезду (рис. 5.12) с центром на вещественной оси, абсцисса которого

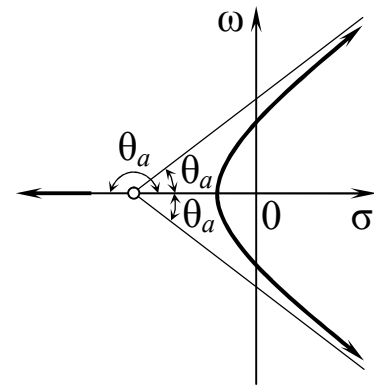


Рис. 5.12. Асимптоты ветвей корневого годографа, уходящих в бесконечность

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{q=1}^m N_q}{n - m}, \quad (5.30)$$

а углы наклона асимптот

$$\theta_a = \pm \frac{2\nu - 1}{n - m} \pi, \quad (5.31)$$

где $\nu = 1, 2, \dots$.

Например, если $P_1 = 0, P_2 = -10, P_3 = -20, P_4 = -67, N_1 = -4,8$ ($n - m = 3$), то по этим формулам получаем $\sigma_a = -30,7; \theta_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$, что и показано на рис. 5.12.

Доказательство этого свойства, приведенное в [3], опускаем.

6. **Точки пересечения** ветвей корневого годографа с **мнимой осью** соответствует чисто мнимым корням характеристического уравнения. Поэтому, как ясно из изложенных в главе 4 критериев устойчивости, эти точки можно найти либо приравняв к нулю предпоследнего определителя Гурвица

$$\Delta_{n-1}(K) = 0,$$

либо, лучше всего, из условия прохождения кривой Михайлова через начало координат, которое дает возможность записать два уравнения

$$X(\omega, K) = 0, \quad Y(\omega, K) = 0, \quad (5.32)$$

где X и Y – вещественная и мнимая части выражения кривой Михайлова

$$D(j\omega) = L(j\omega) + KN(j\omega).$$

Уравнения (5.32) сразу определяют ординаты ω точек пересечения ветви корневого годографа с мнимой осью и значения K , соответствующие этим точкам.

Эти точки можно определить также и путем проб, как такие точки на мнимой оси, которые удовлетворяют уравнению фаз (5.28).

7. **Точки пересечения ветвей** корневого годографа с вещественной осью это точки, в которых два корня сливаются, превращаясь из вещественных в комплексные или наоборот. Для определения координат этих точек на вещественной оси используется уравнение фаз в малых приращениях, соответствующее малому перемещению какого-либо корня вдоль ветви годографа. Такое уравнение согласно (5.28) имеет вид

$$\sum_{q=1}^m \Delta\theta_q^0 - \sum_{i=1}^n \Delta q_i = 0, \quad (5.33)$$

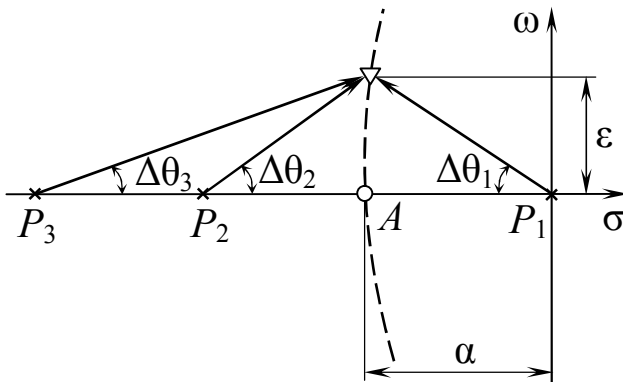


Рис. 5.13. К определению точки пересечения ветви корневого годографа с действительной осью

так как правая часть (5.28) является постоянной величиной.

Рассмотрим, например, случай трех полюсов (рис. 5.13). Обозначим координату искомой точки A через $-\alpha$ ($\alpha > 0$), а малое смещение корня s из точки A – через ϵ . Тогда согласно (5.33) имеем

$$-(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) = 0.$$

Заменяя малые углы их тангенсами, с учетом знаков углов получим

$$-\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{|P_2| - \alpha} + \frac{\varepsilon}{|P_3| - \alpha}\right) = 0$$

или

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{|P_2| - \alpha} - \frac{1}{|P_3| - \alpha} = 0,$$

откуда можно определить искомое значение α .

8. Если имеются комплексные полюса (или нули), то **угол выхода** ветви корневого годографа из комплексного полюса (или входа в комплексный нуль) можно определить из уравнения фаз (5.28) для этого полюса (или нуля). В самом деле, при малом удалении корня s_i от полюса P_i (рис. 5.14) искомая касательная к траектории корня совпадает с вектором $(s_i - P_i)$, наклон которого θ_i входит в уравнение фаз и, следовательно, может быть из него определен. Аналогично обстоит дело и при входе ветви в комплексный нуль.

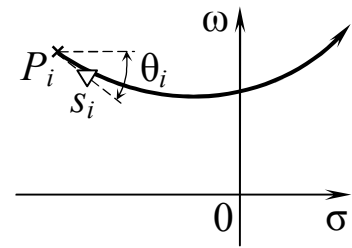


Рис. 5.14. Ветвь корневого годографа, выходящая из комплексного полюса P_i

Например, определяя угол выхода ветви θ_2 из полюса P_2 на рис. 5.15 если дано

$$\theta_1 = 120^\circ, \theta_3 = 90^\circ,$$

$$\theta_4 = 30^\circ, \theta_1^0 = 45^\circ.$$

Из уравнения фаз (5.28) имеем

$$\begin{aligned} \theta_1^0 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) &= \\ &= \pm(2\nu - 1)180^\circ, \nu = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда при $\nu = 1$ находим

$$\theta_2 = 180^\circ - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_1^0 = -15^\circ.$$

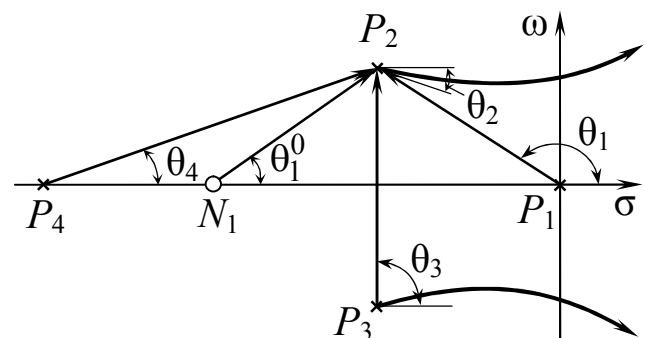


Рис. 5.15. К примеру определения угла выхода ветви корневого годографа из полюса

9. Из расположения асимптот в виде правильной $(n - m)$ – лучевой звезды вытекает, что при $(n - m) > 2$ одни ветви идут вправо, т. е. приближаются к мнимой оси с увеличением K , а

другие уходят влево, т. е. удаляются от мнимой оси. Очевидно, что при оценке качества процесса регулирования важны первые из них, а влиянием вторых часто можно пренебречь, что упрощает исследование. Ближайшие к мнимой оси корни называются *доминирующими*.

10. При построении корневых годографов бывает полезно также использовать *свойства суммы и произведения корней* (свойства Виета), а именно: из алгебры известно, что для уравнения

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

имеют место свойства

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = -\frac{a_1}{a_0}; \quad s_1s_2\dots s_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Эти формулы позволяют, например, найти расположение двух корней, после того как предыдущие $n-2$ найдены. Они могут быть полезны и в других случаях.

Полученные общие свойства корневых годографов позволяют наглядно представить себе изменение расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении общего коэффициента усиления разомкнутой цепи K . Это используется при синтезе систем автоматического управления. Аналогично можно строить корневой годограф и по другим параметрам системы.

Пример 5.1. Пусть известна передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}.$$

Тогда согласно (5.23) характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8+K)s + 3K = 0.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет нуль:

$$N_1 = -3$$

и полюсы:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = -4, \quad P_{3,4} = -1 \pm j.$$

Расположение нуля и полюсов на плоскости s показано на рис. 5.16. Число ветвей корневого годографа равно 4 (свойство 2). Согласно свойству 4 при $K=0$ ветви начинаются в полюсах P_1, P_2, P_3, P_4 и при $K \rightarrow \infty$

(свойство 4) одна ветвь стремится из полюса $P_1=0$ в нуль $N_1=-3$, а из полюса $P_2=-4$ стремится в бесконечность по действительной оси (рис. 5.17).

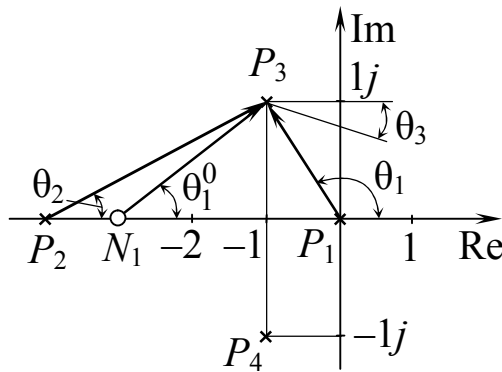


Рис. 5.16. Расположение нуля и полюсов к примеру 5.1

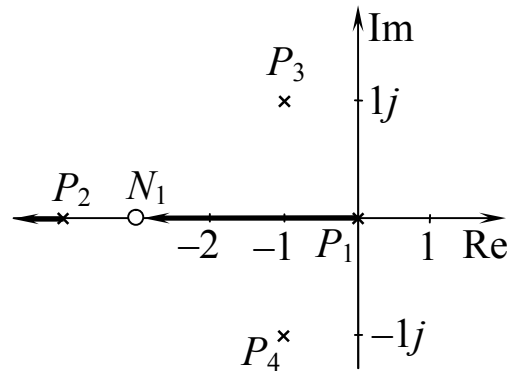


Рис. 5.17. Иллюстрация свойства 4

Определим число асимптот: $n - m = 4 - 1 = 3$ (свойство 5). Определим координату пересечения асимптот с действительной осью,

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^4 P_i - \sum_{j=1}^1 N_j}{n - m} = \frac{0 - 4 - 1 + j - 1 - j - (-3)}{4 - 1} = -1$$

и углы асимптот:

$$\theta_a = \pm \frac{2\nu - 1}{n - m} 180^\circ = \frac{2\nu - 1}{3} 180^\circ,$$

где $\nu = 1, 2, 3$; $\theta_{a1} = 180^\circ/3 = 60^\circ$;

$$\theta_{a2} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3} 180^\circ = 180^\circ;$$

$$\theta_{a3} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3} 180^\circ = 300^\circ = -60^\circ$$

(рис. 5.18).

Определим точки пересечения с мнимой осью (свойство 6). По критерию Гурвица, для уравнения

$$D(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0,$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_3 = 8 + K$, $a_4 = 3K$, матрица Гурвица согласно выражению (4.4) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

В этом случае условием устойчивости будет положительность всех коэффициентов характеристического уравнения и выполнение неравенства (4.8), а на границе устойчивости вместо неравенства (4.8) будет равенство

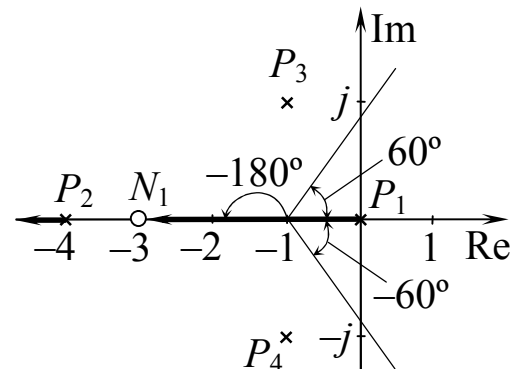


Рис. 5.18. Определение асимптот ветвей корневого годографа (пример 5.1)

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 = 6 \cdot 10(8 + K) - (8 + K)^2 - 6^2 \cdot 3K = 0, \text{ или} \\ K^2 + 64K - 416 = 0.$$

Возьмем положительный корень этого уравнения $K_{\text{гр}} = 5,9473$.

Годограф Михайлова описывается выражением

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$X(\omega) = a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4,$$

$$Y(\omega) = -a_1 \omega^3 + a_3 \omega.$$

Граница области устойчивости описывается уравнениями

$$X(\omega_{\text{гр}}) = 0, \quad Y(\omega_{\text{гр}}) = 0.$$

Из второго уравнения

$$-a_1 \omega^3 + a_3 \omega = 0$$

находим

$$\omega_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \sqrt{\frac{8 + K_{\text{гр}}}{6}} = 1,5246.$$

Найденное по критерию Гурвица значение граничного коэффициента усиления $K_{\text{гр}}$ можно проверить, решив относительно K уравнение, получающееся при подстановке найденной частоты $\omega_{\text{гр}}$ в уравнение $X(\omega) = 0$, которое совпадает с уравнением $\Delta_3 = 0$.

Определим углы выхода годографа из полюсов P_3 и P_4 (свойство 8):

$$\theta_1^0 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 180^\circ.$$

Углы $\theta_1^0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ указаны на рис. 5.16: $\theta_1^0 = 26,5^\circ; \theta_1 = 135^\circ; \theta_2 = 18,2^\circ; \theta_4 = 90^\circ; \theta_3 = -(180^\circ + \theta_1 + \theta_2 + \theta_4) - \theta_1^0 = -36,7^\circ$.

Чтобы определить при $K = K_{\text{гр}} \approx 6$ полюсы на вещественной отрицательной полуоси (чисто мнимые уже определены: $s_{3,4} = \pm j\omega_{\text{гр}} = \pm 1,53j$), воспользуемся свойством корней (свойство Виета).

$$1. \prod_{i=1}^n s_i = (-1)^n a_n / a_0; \quad s_1 s_2 s_3 s_4 = 3K_{\text{гр}}/1.$$

Так как $s_3 s_4 = \omega_{\text{гр}}^2$, то $s_1 s_2 = 3K_{\text{гр}}/\omega_{\text{гр}}^2$.

$$2. \sum_{i=1}^n s_i = -a_1 / a_0; \quad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = -6.$$

Так как $s_3 + s_4 = 0$, то $s_1 + s_2 = -6$.

Решаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} s_1 s_2 &= 3 \cdot 6 / 1,53^2; \\ s_1 + s_2 &= -6 \end{aligned} \right\} \\ \hline s_1 = -1,8; \quad s_2 = -4,2.$$

Если необходимо повысить точность расчетов, то нужно использовать уравнение (5.28).

5.5. Интегральные оценки качества переходных процессов

Интегральные оценки качества являются интегралами по времени от некоторых функций переходного процесса свободной составляющей выходной величины $x_{св}(t)$ или ошибки $e_{св}(t)$. Цель использования таких критериев состоит в том, чтобы получить общую оценку быстродействия и отклонения регулируемой величины от установившегося значения. Интегральные оценки качества позволяют одним числом оценивать и величины отклонений и время затухания переходного процесса. Широко используются линейные и квадратичные интегральные оценки.

Линейные оценки вычисляются по формуле

$$J_{л} = \int_0^{\infty} \varphi(t) t^n e_{св}(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ – некоторая заданная функция времени – функция веса (которую не следует смешивать с $w(t)$ – весовой функцией системы). Часто берется функция $\varphi(t) = e^{-\alpha t}$.

Однако чаще используют моменты i -го порядка, т. е. оценки вида

$$J_{л0} = \int_0^{\infty} e_{св}(t) dt; \quad (5.34)$$

$$J_{л1} = \int_0^{\infty} t e_{св}(t) dt; \quad (5.35)$$

.....

$$J_{ли} = \int_0^{\infty} t^i e_{св}(t) dt. \quad (5.36)$$

Простейшей из этих оценок является $J_{л0}$ (5.34). Если система устойчива, то $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{св}(t) = 0$, интеграл $J_{л0}$ стремится к конечному значению, равному площади под кривой $e_{св}(t)$ (рис. 5.19). Чем выше быстродействие системы, тем меньше величина $J_{л0}$, поэтому параметры системы следует выбирать так, чтобы $J_{л0}$ стремился к минимуму, т. е. $dJ_{л0}/dA = 0$, где A – варьируемый параметр системы. Недостатком этой оценки является то, что

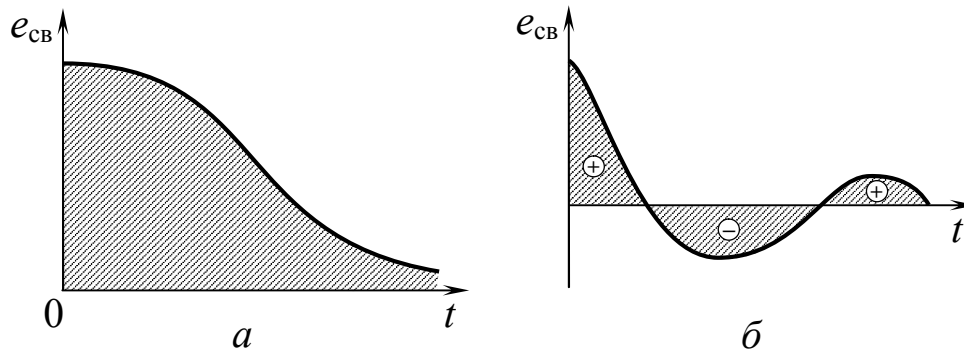


Рис. 5.19. Изменение во времени ошибки регулирования: монотонное (а), колебательное (б)

она применима к монотонным или аperiodическим процессам (рис. 5.19, а). При колебательном процессе (рис. 5.19, б) площади, ограниченные $e_{св}(t)$, складывают алгебраически и минимуму $J_{л0}$ может соответствовать процесс с большим числом колебаний n , т. е. с малым быстродействием и даже с незатухающими колебаниями.

Линейные интегральные оценки легко вычисляются.

Для $e_{св}(t)$ изображение по Лапласу есть

$$E_{св}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e_{св}(t) dt. \quad (5.37)$$

Линейные оценки i -го порядка (5.36) легко вычисляются по изображению (5.37) переменной $e_{св}(t)$, если воспользоваться теоремой о дифференцировании изображения. Дифференцируя изображение (5.37) по переменной s , получаем равенство

$$\frac{d^i}{ds^i} E_{св}(s) = \int_0^{\infty} \frac{d^i}{ds^i} (e^{-st}) e_{св}(t) dt = \int_0^{\infty} (-t)^i e^{-st} e_{св}(t) dt,$$

откуда следует

$$\int_0^{\infty} t^i e^{-st} e_{св}(t) dt = (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} E_{св}(s).$$

Отсюда с учетом выражения (5.36) получим

$$J_{ли} = (-1)^i \left[\frac{d^i}{ds^i} E_{св}(s) \right]_{s=0}. \quad (5.38)$$

В частном случае линейной оценки нулевого порядка (5.31) имеем

$$J_{л0} = E_{св}(0).$$

Сравнивая формулу (5.38) с выражением (3.39) для определения коэффициента ошибок, приходим к выводу о том, что линейные оценки i -го порядка $J_{ли}$ определяются по изображению свободного процесса $E_{св}(s)$ так же, как коэффициент ошибок c_i определяется по передаточной дирекции для ошибки $\Phi_l(s)$. Это можно сделать, например, делением многочлена числителя выражения для $E_{св}(s)$ на многочлен знаменателя. Следует однако учесть, что передаточная функция, связывающая свободную составляющую и входную величину системы, вообще говоря, не совпадает с передаточной функцией системы [6].

Геометрический смысл интегральной квадратичной оценки пояснен на рис. 5.20. Выбирая параметры системы по минимуму квадратичной интегральной оценки J_{20} , приближаем кривую $e_{св}(t)$ к осям $e_{св}$ и t .

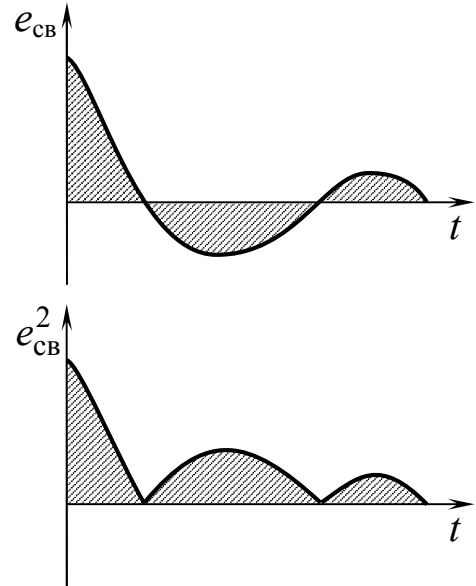


Рис. 5.20. Иллюстрация простейшей квадратичной интегральной оценки

Воспользуемся обобщенной формулой Рэлея [12]

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)V^*(\omega)d\omega,$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ спектральные плотности (преобразования Фурье) сигналов $u(t)$ и $v(t)$, звездочкой отмечены комплексно сопряженные величины.

Тогда

$$J_{кв0} = \int_0^{\infty} e_{св}^2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E_{св}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (5.41)$$

С учетом предельной теоремы преобразования Лапласа

$$e_{св}(t) = h_{уст} - h(t) \doteq E_{св}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [j\omega\Phi(0) - \Phi(j\omega)], \quad (5.42)$$

где $\Phi(p)$ – главная передаточная функция замкнутой системы.

Таким образом, по формулам (5.41) и (5.42) можно вычислить интегральную квадратичную оценку $J_{кв0}$. Например, для системы второго порядка, когда

$$E(s) = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2},$$

имеем

$$J_{\text{кв0}} = \frac{b_1^2 a_0 + b_0^2 a_2}{2a_0 a_1 a_2}.$$

Недостатком интегрального квадратичного показателя $J_{\text{кв0}}$ является то, что во многих случаях системы с меньшим значением этого показателя оказываются более колебательными.

Пример 5.2. Рассмотрим систему с единичной отрицательной обратной связью, передаточная функция разомкнутого контура которой равна

$$W(s) = \frac{K}{s(s+1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы от задающего воздействия до ошибки e записывается так:

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K}.$$

Изображение ошибки $E(s)$ в случае задания $g(t)$ в виде единичного ступенчатого воздействия равно

$$E(s) = \frac{1}{s} \Phi_e(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + K}.$$

Найдем выражение интегральной квадратичной оценки по приведенной ранее формуле, учитывая, что $b_0 = 1$, $b_1 = 1$; $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = K$, $J_{\text{кв0}} = \frac{1+K}{2K} = 0,5 \left(1 + \frac{1}{K}\right)$.

Как видно из полученной зависимости $J_{\text{кв0}}(K)$, значение показателя качества уменьшается с увеличением коэффициента усиления контура; при $K \rightarrow \infty$ имеем предельное значение: $J_{\text{кв0}} \rightarrow 0,5$.

Рассматриваемая система второго порядка устойчива при любом положительном значении K . Действительно, при этом положительны все коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы

$$s^2 + s + K,$$

для полинома второй степени это необходимое условие устойчивости является и достаточным.

Однако стремление к уменьшению интегрального квадратичного показателя качества путем увеличения коэффициента усиления контура вызывает рост колебательности процессов. Чтобы убедиться в этом, получим выражение для колебательности μ , которая равна отношению аб-

солютных значений мнимой и действительной частей корней (5.11). Из выражения для корней характеристического полинома

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = \frac{1}{2}(-1 \pm j\sqrt{4K-1})$$

видно, что при $K > 1/4$ корни становятся комплексными, а процессы – колебательными. Для этих значений коэффициента усиления имеем следующее выражение для корневого показателя качества – колебательности:

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \sqrt{4K-1}.$$

С увеличением K растет колебательность корней μ , а значит, уменьшается относительное затухание (затухание за период) процессов. Заметим, что при этом абсолютное затухание, определяемое действительной частью корней, остается неизменным.

Таким образом, попытка минимизации интегрального квадратичного показателя качества даже для системы второго порядка приводит к чрезмерно колебательным процессам. Это можно объяснить тем, что экстремальную функцию $J_{\text{кв0}}$ является идеальный процесс, затухающий мгновенно; стремление к такому нереальному в динамических системах процессу и показывает приведенный в примере результат.

Чтобы получить быстро затухающий, но достаточно плавный процесс, вводят *улучшенные (обобщенные) квадратичные* интегральные оценки качества

$$J_{\text{кв}i} = \int_0^{\infty} \left[e_{\text{CB}}^2(t) + \tau_1^2 \left(\frac{de_{\text{CB}}}{dt} \right)^2 + \dots + \tau_i^2 \left(\frac{d^i e_{\text{CB}}}{dt^i} \right)^2 \right] dt. \quad (5.43)$$

Остановимся на методике расчета системы по минимуму обобщенной квадратичной оценки

$$J_{\text{кв}1} = \int_0^{\infty} \left[e_{\text{CB}}^2(t) + \tau_1^2 \dot{e}_{\text{CB}}^2(t) \right] dt.$$

Этот интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\begin{aligned} J_{\text{кв}1} &= \int_0^{\infty} [e_{\text{CB}}(t) + \tau_1 \dot{e}_{\text{CB}}(t)]^2 dt - 2\tau_1 \int_0^{\infty} e_{\text{CB}}(t) \dot{e}_{\text{CB}}(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [e_{\text{CB}}(t) + \tau_1 \dot{e}_{\text{CB}}(t)]^2 dt - 2\tau_1 \int_0^{\infty} e_{\text{CB}}(t) de_{\text{CB}}(t). \end{aligned}$$

Если система устойчива, то $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\text{CB}}(t) = 0$, тогда

$$2\tau_1 \int_0^{\infty} e_{\text{CB}}(t) de_{\text{CB}}(t) = \tau_1 e_{\text{CB}}^2(t) \Big|_0^{\infty} = \tau_1 e_{\text{CB}}^2(0).$$

Кроме того, интеграл J_{KB1} будет иметь минимально возможное значение

$$J_{\text{KB1min}} = \tau_1 e_{\text{CB}}(t) \quad (5.44)$$

при

$$e_{\text{CB}}(t) + \tau_1 \dot{e}_{\text{CB}}(t) = 0. \quad (5.45)$$

Решение дифференциального уравнения (5.45)

$$e_{\text{CB}}(t) = e_{\text{CB}}(0) e^{t/\tau_1} \quad (5.46)$$

является оптимальным по минимуму критерия J_{KB1} переходным процессом.

Чем лучше система управления в смысле показателя J_{KB1} , тем ближе процесс к экспоненте (5.46) с постоянной времени τ_1 . Увеличение коэффициента веса τ_1 при формировании показателя J_{KB1} означает предпочтение системам с более медленно затухающими процессами.

Задаваясь значением коэффициента веса τ_1 , ограничивают быстроедействие оптимальной (эталонной) системы и обеспечивают плавность протекания оптимального процесса. Обычно задают

$$\frac{t_p}{6} < \tau_1 < \frac{t_p}{3},$$

где t_p – требуемое время установления (регулирования) [6].

Применение одной из старших квадратичных интегральных оценок $J_{\text{KB}i}$ (5.43) позволяет повысить точность суждения о близости переходного процесса системы к заданной экстремали, являющейся решением линейного дифференциального уравнения

$$a_i e_{\text{CB}}^{(i)}(t) + a_{i-1} e_{\text{CB}}^{(i-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{e}_{\text{CB}}(t) + a_0 e_{\text{CB}}(t) = 0 \quad (5.47)$$

при $a_0 = 1$ и заданных начальных условиях. Обычно принимают

$$\dot{e}_{\text{CB}}(0) = \ddot{e}_{\text{CB}}(0) = \dots = e_{\text{CB}}^{(i-1)}(0) = 0. \quad (5.48)$$

Чтобы определить зависимость между коэффициентами веса формулы (5.43) и коэффициентами уравнения (5.47), записывают тождество

$$\int_0^{\infty} \left[e_{\text{CB}}^2(t) + \tau_1^2 \left(\frac{de_{\text{CB}}}{dt} \right)^2 + \dots + \tau_i^2 \left(\frac{d^i e_{\text{CB}}}{dt^i} \right)^2 \right] dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(e_{\text{CB}} + a_1 \frac{de_{\text{CB}}}{dt} + \dots + a_i \frac{d^i e_{\text{CB}}}{dt^i} \right)^2 dt + C.$$

Раскрывая квадрат суммы под интегралом в правой части и интегрируя удвоенные произведения по частям с учетом начальных условий (5.48), получим

$$\left. \begin{aligned} C &= a_1 e_{\text{CB}}^2(0); \\ \tau_1^2 &= a_1^2 - 2a_0 a_2; \\ \tau_2^4 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + a_0 a_4; \\ \tau_3^6 &= a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_0 a_6; \\ &\dots \\ \tau_i^{2i} &= a_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Оценка $J_{\text{КВ}i}$ вычисляется как сумма

$$J_{\text{КВ}i} = J_{\text{КВ}0} + \sum_{j=1}^i \tau_j^2 J_{0j},$$

компоненты которой

$$J_{0j} = \int_0^{\infty} \left[e_{\text{CB}}^{(j)}(t) \right]^2 dt$$

определяются по изображению $L\{e_{\text{CB}}^{(j)}(t)\}$ точно так же, как оценка $J_{\text{КВ}0}$ [6].

5.6. Частотные методы оценки качества регулирования

Частотные методы исследования систем управления широко используют в инженерной практике. Они основаны на привычном для инженеров графическом изображении динамических характеристик системы, поэтому нашли применение при расчетах систем автоматического управления и позволили разработать ряд

удобных инженерных методов анализа и синтеза систем автоматического регулирования. В СССР большую роль в пропаганде и развитии частотных методов сыграли работы В. В. Солодовникова. В них приведены метод оценки качества по вещественным частотным характеристикам, метод построения переходных процессов по вещественным трапецеидальным характеристикам при ступенчатых воздействиях, а также метод синтеза корректирующих устройств. Была доказана возможность применения частотных методов к различным системам с распределенными параметрами и с запаздыванием. Применение этих методов позволяет определить такие важные показатели качества, как быстродействие, перерегулирование, колебательность процесса. Эти вопросы хорошо освещены в литературе, и имеется большое количество вспомогательных таблиц и графиков, что в значительной степени упростило инженерные расчеты.

Прежде всего остановимся на аналитической зависимости между переходной характеристикой и частотными характеристиками системы.

Будем рассматривать переходный процесс $x(t)$ при единичном скачке задающего воздействия $g(t) = 1(t)$. В изображениях

$$X(s) = \Phi(s)G(s), \quad G(s) = \frac{1}{s}, \quad (5.50)$$

где $\Phi(s)$ – главная передаточная функция замкнутой системы.

Если передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)},$$

то

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)},$$

где $D(s) = L(s) + KN(s)$.

По теореме разложения найдем переходную характеристику

$$x(t) = h(t) = \frac{KN(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{KN(s_i)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t}, \quad t > 0, \quad (5.51)$$

где s_i – корни многочлена $D(s)$.

Частотные характеристики можно получить по временным характеристикам с помощью преобразования Фурье.

Запишем выражение обратного преобразования Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.52)$$

Здесь $\Phi(j\omega)$ является амплитудно-фазочастотной характеристикой (АФЧХ) замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (5.53)$$

причем $P(\omega)$ – вещественная, а $Q(\omega)$ – мнимая частотные характеристики замкнутой системы.

Известно, что $P(\omega)$ – четная, а $Q(\omega)$ – нечетная функции частоты ω .

Вычтем из (5.52) установившееся значение

$$x_{уст} = P(0).$$

Получим

$$x(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega) - P(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Подставим сюда выражение (5.53) и заменим $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$. Отбросив мнимую часть полученного выражения (так как $x(t)$ вещественно), будем иметь

$$x(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} [P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t - P(0) \sin \omega t] d\omega.$$

Подынтегральное выражение представляет собой четную функцию. Поэтому интегрирование в пределах $(-\infty, \infty)$ можно заменить на $(0, \infty)$ и удвоить результат. Кроме того, заметим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(0) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{P(0)}{2}.$$

В результате получаем

$$x(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.54)$$

Поскольку даны нулевые начальные условия, причем нулевые значения функции распространяются на $t < 0$, то можно, подставив в формулу (5.54) вместо t величину $-t$, написать

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.55)$$

Складывая и вычитая выражения (5.54) и (5.55), приходим к формулам соответственно

$$x(t) = h(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega \quad (5.56)$$

или

$$x(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.57)$$

Последняя формула будет использована ниже для частотных оценок качества переходного процесса. Отметим, что существуют приближенные способы построения кривой переходного процесса в замкнутой системе по этой формуле.

Вычисление переходной характеристики по формулам (5.56) и (5.57) возможно лишь численными методами с применением ЭВМ. Но возможен и другой путь, основанный на аппроксимации вещественной или мнимой частотных характеристик кусочно-линейными функциями частоты [1]. В инженерной практике широко применялся метод разложения частотной характеристики на сумму трапеций, предложенный В.В. Солодовниковым.

Длительность переходного процесса и перерегулирование можно приближенно оценить по виду вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P(\omega)$.

На основании зависимости (5.57) выведены следующие оценки.

В переходном процессе получится перерегулирование $\sigma > 18\%$, если $P(\omega)$ имеет «горб» (рис. 5.21, а). При отсутствии «горба» (рис. 5.21, б) будет $\sigma < 18\%$. Процесс окажется навер-

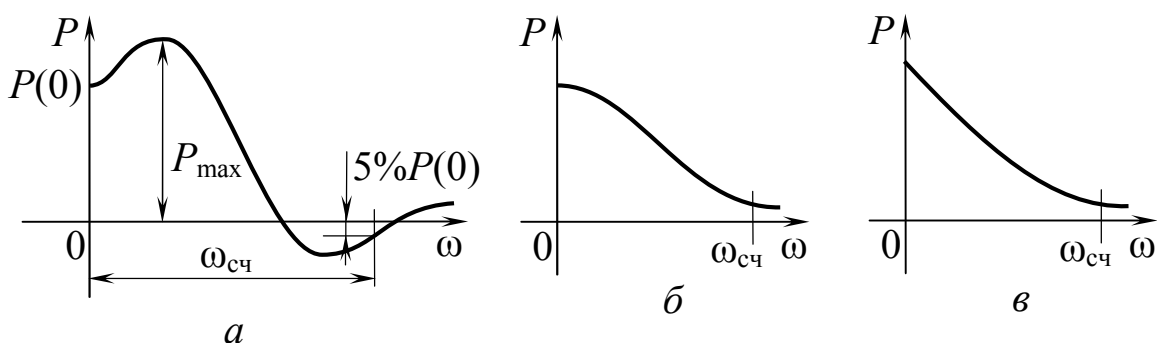


Рис. 5.21. Различные формы вещественной частотной характеристики замкнутой системы

няка монотонным ($\sigma = 0$), если $dP/d\omega < 0$ и монотонно убывает по абсолютному значению (рис. 5.21, в).

Длительность переходного процесса t_p оценивается приблизительно по ширине интервала существенных частот $\omega_{сч}$ (рис. 5.21), причем

$$\frac{\pi}{\omega_{сч}} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_{сч}}. \quad (5.58)$$

Важно отметить, что время t_p обратно пропорционально значению $\omega_{сч}$, т. е. чем более растянута частотная характеристика, тем короче переходный процесс. Физически это связано с тем, что, чем более высокие частоты «пропускает» система, тем она менее инерционна в своих реакциях на внешние воздействия.

Это же свойство позволяет связать время t_p с частотой среза $\omega_{сч}$ (рис. 5.22) частотной характеристики разомкнутой цепи.

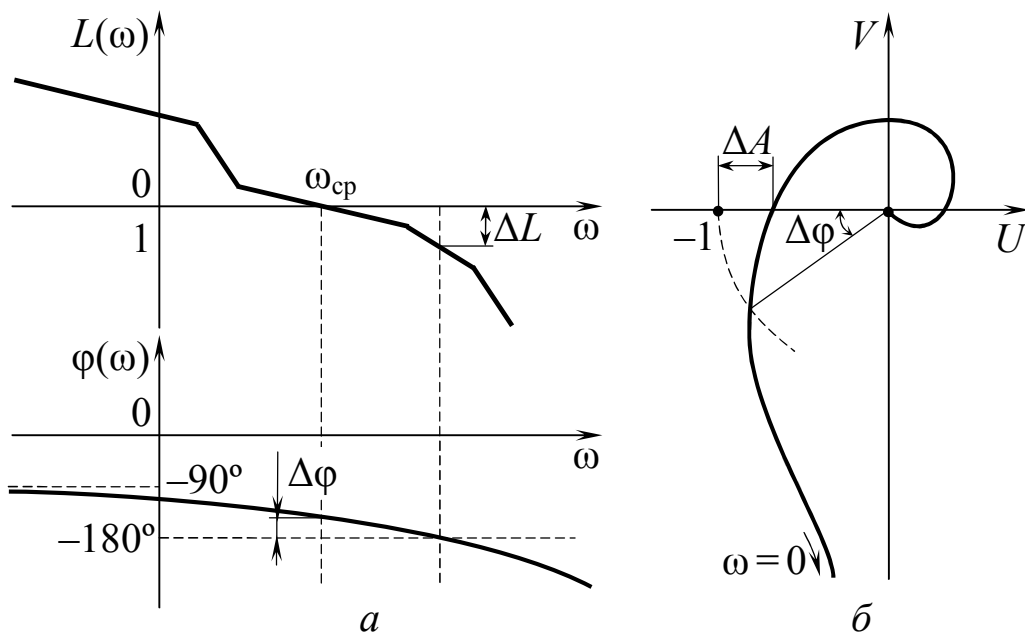


Рис. 5.22. Частотные характеристики разомкнутой системы: ЛАЧХ и ЛФЧХ (а), АФЧХ (б); ΔL – запас устойчивости по амплитуде; $\Delta\phi$ – запас устойчивости по фазе

Длительность переходного процесса t_p тем меньше, чем больше частота среза $\omega_{сч}$. Зависимость между величинами σ , t_p , $\omega_{сч}$ и P_{\max} представлена графиком на рис. 5.23.

Кроме того, свойство частотных характеристик таково, что начальная их часть влияет в основном на очертание конца переходного процесса $x(t)$, причем $P(0) = x_{уст}$ (рис. 5.21). Основное же

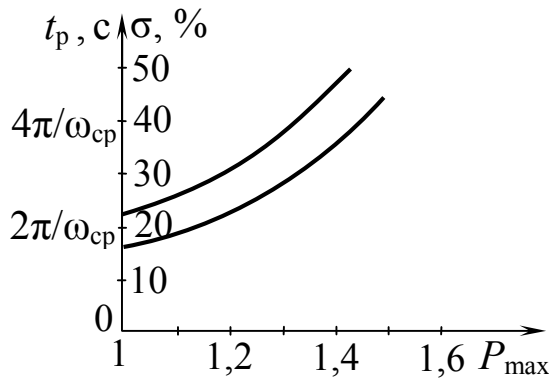


Рис. 5.23. Зависимости времени регулирования t_p и перерегулирования σ от максимума вещественной частотной характеристики замкнутой системы P_{\max}

чество переходного процесса. В частности, частота среза $\omega_{\text{ср}}$, как уже говорилось, определяет полосу пропускания сигналов и длительность переходного процесса. Наклон $L(\omega)$ вблизи частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ характеризует колебательность переходного процесса. Так, наклон -20 дБ/дек при $\omega = \omega_{\text{ср}}$ (рис. 5.22, а), соответствующий свойствам апериодического звена, обеспечивает наименьшую

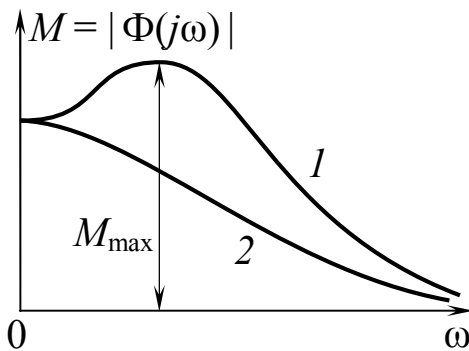


Рис. 5.24. Возможные формы АЧХ замкнутой системы: $M_{\max} > 1$ (кривая 1); $M_{\max} = 1$ (кривая 2)

колебательность переходного процесса в замкнутой системе.

Следующей частотной оценкой качества является **показатель колебательности** — максимальное значение M_{\max} амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы (рис. 5.24)

$$M = |\Phi(j\omega)|.$$

Эта величина M может быть определена по виду частотной характеристики разомкнутой цепи данной системы. В самом деле

$$M = |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| = \left| \frac{U + jV}{1+U + jV} \right| = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{(1+U)^2 + V^2}}.$$

Отсюда следует равенство

$$U^2 + V^2 = M^2 \left[(1+U)^2 + V^2 \right],$$

которое преобразуется к уравнению окружности

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2 \quad (5.59)$$

с координатой центра C и радиусом R :

$$C = -\frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad R = \frac{M}{M^2 - 1}. \quad (5.60)$$

Задаваясь различными значениями M от 0 до ∞ , можно построить семейство таких окружностей (рис. 5.25). При $M = 1$ из уравнения (5.59) следует $U = -0,5$, т. е. окружность вырождается в прямую ($R \rightarrow \infty, C \rightarrow \infty$), параллельную мнимой оси и проходящую через точку $(-0,5, j0)$.

При $0 < M < 1$ окружности располагаются справа от линии, соответствующей $M = 1$, а при $M > 1$ – слева от нее. Если $M \rightarrow \infty$, то окружность вырождается в точку с координатами $(-1, j0)$. Номограммы можно использовать для построения амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы $A_3(\omega)$ (рис. 5.24). Для этого на номограмму наносят амплитудно-фазочастотную характеристику разомкнутой системы $W(j\omega)$ (рис. 5.25), далее по точкам пересечения последней с окружностями определяют значения $A_3(\omega) = M$. Когда нужно оценить значение показателя колебательности M , то строить амплитудно-

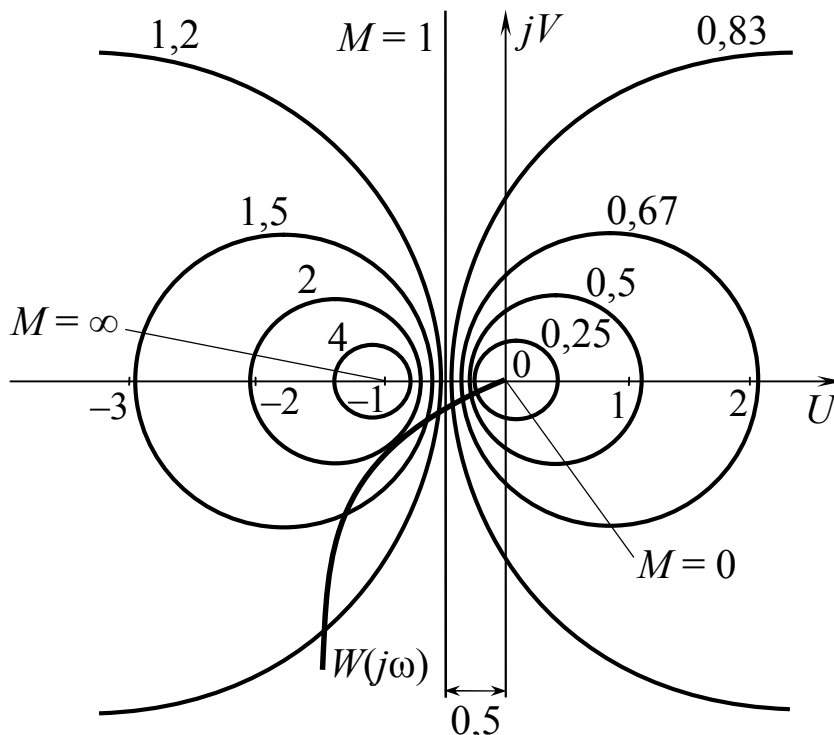


Рис. 5.25. Линии равных значений показателя колебательности M на плоскости (U, V)

фазочастотную характеристику не нужно, а необходимо только оценить, какой наименьшей окружности она коснется; значение $M = \text{const}$, соответствующее этой окружности, и будет показателем колебательности M_{max} .

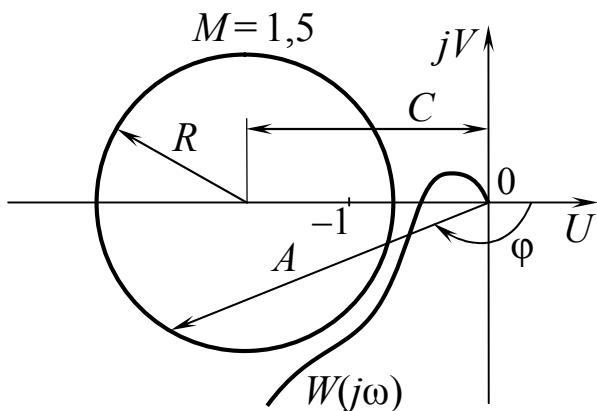


Рис. 5.26. Вид АФЧХ разомкнутой системы, соответствующей замкнутой системе с показателем колебательности, не превышающим заданного значения

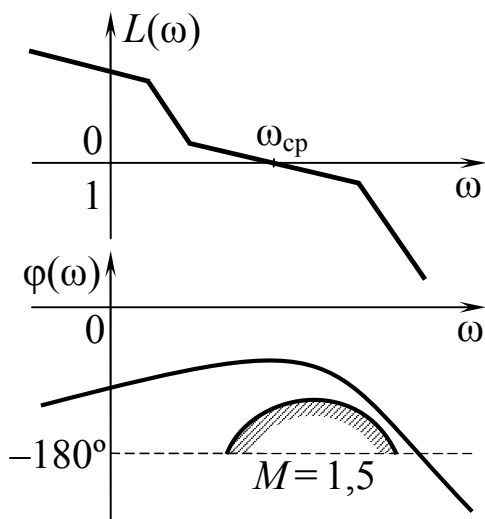


Рис. 5.27. Перенос запретной области на плоскость ФЧХ

При проектировании системы может быть поставлено условие, чтобы показатель колебательности M не превышал заданного значения. Это значение определяет ту запретную область, куда не должна заходить амплитудно-фазочастотная характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ (рис. 5.26).

Такую запретную область можно перенести на плоскость логарифмической частотной характеристики следующим образом. На кривой $M = 1,5$ (рис. 5.26) в каждой точке имеем определенное значение амплитуды A и фазы φ . Следовательно, зная $L(\omega)$ (рис. 5.27), можем для каждого значения $L = 20 \lg A$ отметить там соответствующую точку (ω, φ) . Таким образом, образуется кривая $M = 1,5$ на поле логарифмических характеристик, очерчивающая запретную зону, в которую не должна заходить фазочастотная характеристика $\varphi(\omega)$.

Если АЧХ устойчивой замкнутой системы независимо от ее сложности

близка к АЧХ колебательного звена с показателем колебательности M и частотой резонансного пика ω_M , то и переходные процессы в рассматриваемой системе будут близки к переходным процессам в колебательном звене. Эта гипотеза позволяет оценивать переходные характеристики многих сложных САУ по АЧХ

замкнутой системы (показателю колебательности M) и по частотным характеристикам разомкнутой системы (запасу по фазе).

В том случае, когда систему автоматического регулирования можно рассматривать как колебательное звено, передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta T_2 s + T_2^2 s^2}. \quad (5.61)$$

Для этой передаточной функции колебательного звена можно найти зависимости между перерегулированием σ , показателем колебательности M , запасом устойчивости по фазе μ и параметром затухания ζ . Эти кривые приведены на рис. 5.28, а. Для той же передаточной функции можно определить зависимость между перерегулированием σ и показателем колебательности (рис. 5.28, б) [6].

В этом случае разомкнутая система представляется в виде последовательного соединения инерционного и интегрирующего звеньев [6] с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)}. \quad (5.62)$$

Тогда с учетом равенства $\Phi(s) = W(s)/[1 + W(s)]$ параметры передаточной функции (5.61) колебательного звена следующим образом выражаются через параметры передаточной функции (5.62) разомкнутой системы:

$$T_2^2 = T_1/K, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT_1}}. \quad (5.63)$$

Поскольку аргумент частотной передаточной функции $W(j\omega)$ согласно (5.62) определяется как

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T_1,$$

то запас по фазе в радианах будет

$$\mu = \pi + \varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega_{\text{ср}} T_1. \quad (5.64)$$

Приравнявая единице выражение для АЧХ разомкнутой системы

$$|W(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{(T_1 \omega)^2 + 1}}$$

и решая получающееся уравнение относительно ω^2 , находим квадрат частоты среза разомкнутой системы

$$\omega_{\text{ср}}^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(T_1 K)^2}}{2T_1^2}.$$

Отсюда с учетом (5.63) получим

$$\omega_{\text{ср}}^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 1/(4\zeta^4)}}{2T_1^2}. \quad (5.65)$$

Подставляя в равенство (5.64) величину $\omega_{\text{ср}}T_1$, найденную из (5.65), получаем формулу для запаса по фазе, выраженную через параметр ζ замкнутой системы,

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 1/(4\zeta^4)}}{2}}. \quad (5.66)$$

Теперь исследуем на максимум АЧХ колебательного звена

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + (2\zeta T_2\omega)^2}}$$

с учетом того, что этот максимум достигается при минимуме подкоренного выражения знаменателя. Тогда найдем, что частота максимума

$$\omega_M = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{T_2}, \quad (5.67)$$

а значение максимума

$$M_{\text{max}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (5.68)$$

причем максимум существует только при $\zeta \leq 1/\sqrt{2} = 0,7071$, при $\zeta = 1/\sqrt{2}$ максимум АЧХ смещается в точку $\omega = 0$.

С учетом выражения (2.65) для переходной характеристики колебательного звена

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right), \quad t \geq 0,$$

где $\alpha = \zeta/T_2$, $\beta = \sqrt{1/T_2^2 - \alpha^2}$, находим значение первого максимума, достигаемого при $t_M = \pi/\beta$,

$$h_{\text{max1}} = 1 + e^{-\alpha\pi/\beta},$$

и перерегулирование

$$\sigma = h_{\max 1} - 1 = e^{-\alpha\pi/\beta} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}. \quad (5.69)$$

По формулам (5.66), (5.67) и (5.69) строим кривые, представленные на рис. 5.28.

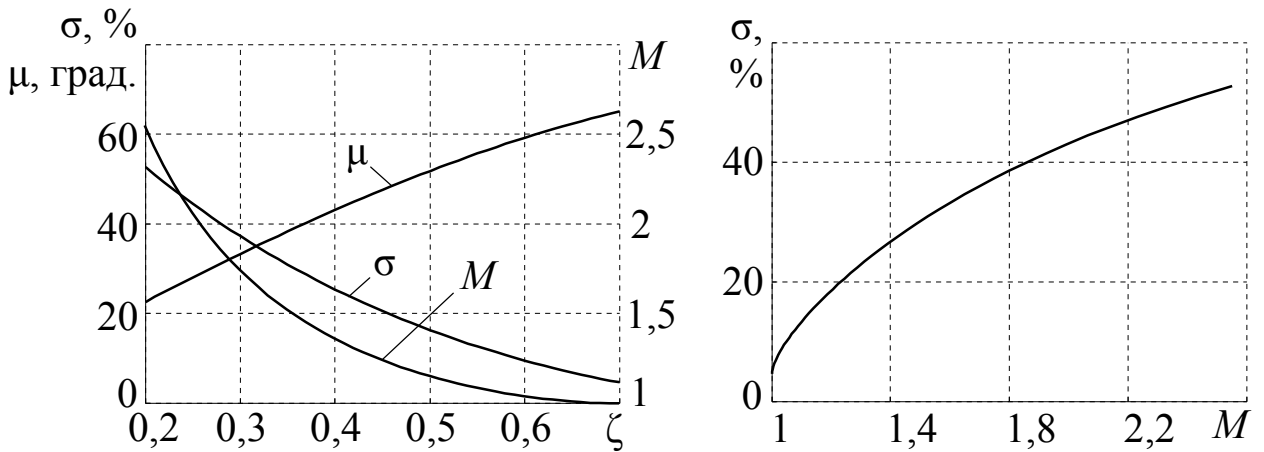


Рис. 5.28. Зависимости для эквивалентного колебательного звена

5.7. Управляемость и наблюдаемость систем

В случае многомерных систем, кроме понятия устойчивости системы, вводятся понятия управляемость и наблюдаемость, используемые, в частности, при расчете управляющего устройства, обеспечивающего оптимальное в определенном смысле управление заданным объектом.

Рассмотрим линейную систему, динамика которой описывается дифференциальным уравнением n -го порядка. Тогда состояние системы будет определяться n координатами x_i ($i = 1, \dots, n$). Эти координаты состояния системы не обязательно будут совпадать с физическими величинами, в том числе и с выходными величинами системы. Поэтому в общем случае надо ввести отдельные обозначения для выходных управляемых величин y_1, y_2, \dots, y_q и записать их выражения через x_i . Входные управляющие величины системы обозначим через u_1, u_2, \dots, u_m (рис. 5.29).

В качестве системы на рис. 5.29 может рассматриваться

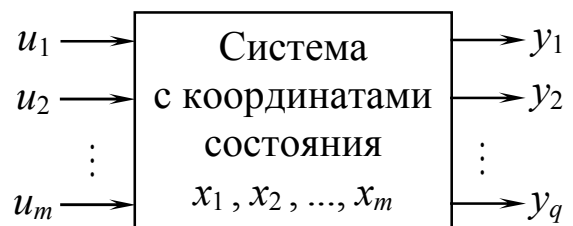


Рис. 5.29. Простейшее изображение многомерной системы

система автоматического управления (тогда u_1, u_2, \dots, u_m будут играть роль внешних задающих воздействий g_1, g_2, \dots, g_m) либо сложный управляемый объект (тогда u_1, u_2, \dots, u_m будут управляющими воздействиями со стороны регуляторов).

Уравнения динамики линейной системы в векторно-матричной форме можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

где обозначены векторы координат состояния системы \mathbf{x} , управления \mathbf{u} и наблюдения (измерения) на выходе системы \mathbf{y} ,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$$

и матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q1} & c_{q2} & \dots & c_{qn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{q1} & d_{q2} & \dots & d_{qm} \end{pmatrix}.$$

Первое векторно-матричное уравнение в системе уравнений (5.70) называют **уравнением состояния**, второе – **уравнением выхода**.

Поскольку матрица \mathbf{D} в (5.70) не оказывает влияния на свойства управляемости и наблюдаемости, ее можно не учитывать в описании, т. е. считать нулевой.

Рассматривают управляемость как динамических объектов без регуляторов, так и систем, содержащих замкнутые контуры управления. Существуют различные определения понятия управляемости, различающиеся как условиями перевода систе-

мы из одного состояния в другое, так и ограничениями, накладываемыми на управляющие воздействия. *Наибольшее распространение получили определения понятий управляемости и наблюдаемости, предложенные Р. Калманом (R. Kalman).*

Система (объект) называется **полностью** или **вполне управляемой**, если существует вектор воздействий $\mathbf{u}(t)$, который за конечное время $\Delta t = t_k - t_0$ переводит систему (объект) из любого исходного $\mathbf{x}(t_0)$ в любое заданное $\mathbf{x}(t_k)$ состояние. Обычно вектор $\mathbf{u}(t)$ принадлежит к классу кусочно-непрерывных функций.

Для перевода системы за бесконечное время достаточно, чтобы конечное состояние $\mathbf{x}(t_k)$ было асимптотически устойчивым «в целом», т. е. для всего пространства состояний. Перевод за конечное время требует, кроме того, выполнения дополнительных условий управляемости.

Более сильной формой управляемости является **нормализуемость (нормальность)**. Говорят, что система является **нормализуемой**, если каждая координата вектора управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$ в отдельности обеспечивает управляемость.

Система (объект) называется **полностью** или **вполне наблюдаемой**, если по данным измерений векторов $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ можно за конечное время $\Delta t = t_k - t$ однозначно определить состояние системы $\mathbf{x}(t)$. Другими словами, система полностью наблюдаема, если существует момент времени t_k , $t < t_k < \infty$ такой, что по данным измерений $\mathbf{y}(\tau)$, $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [t, t_k]$, можно определить состояние $\mathbf{x}(t)$. Полная наблюдаемость системы означает возможность определения состояния $\mathbf{x}(t)$ по будущим значениям векторов $\mathbf{y}(\tau)$, $\mathbf{u}(\tau)$, что практически не осуществимо. Поэтому в задачах управления более важным обстоятельством является установление свойства полной восстанавливаемости вектора $\mathbf{x}(t)$ по прошлым значениям векторов $\mathbf{y}(\tau)$, $\mathbf{u}(\tau)$ [2].

Система (объект) называется **полностью** или **вполне восстанавливаемой**, если существует такой момент времени t_0 , $t < t_0 < \infty$, что по данным измерений $\mathbf{y}(\tau)$, $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_k]$, можно определить состояние $\mathbf{x}(t)$.

Для линейных стационарных систем из свойства полной наблюдаемости следует свойство полной восстанавливаемости и наоборот.

Однако не любая система является полностью управляемой или полностью наблюдаемой.

Для управления системой по принципу обратной связи нередко требуется располагать информацией о текущем состоянии системы, т. е. о значениях переменных состояния вектора $x(t)$ в каждый момент времени. *Однако не все переменные состояния имеют физический аналог в реальной системе.* Некоторые из них представляют абстрактные величины, а потому не могут быть измерены. Измеряемыми являются физические переменные вектора выхода $y(t)$, через которые должны однозначно выражаться все переменные вектора состояния $x(t)$. В линейных системах связь между x и y линейная. В общем случае вектор y может зависеть не только от вектора x , но и от вектора управляющих воздействий u .

В общем случае система может состоять из четырех частей:

- 1) полностью неуправляемой и полностью ненаблюдаемой;
- 2) полностью управляемой, но не полностью наблюдаемой;
- 3) полностью наблюдаемой, но не полностью управляемой;
- 4) полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

Если система полностью и управляема, и наблюдаема, то ее называют *полной* [2].

В одномерном случае передаточная функция системы $W(s)$ является невырожденной тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия полной управляемости и полной наблюдаемости.

Для установления свойств управляемости и наблюдаемости системы (объекта), представленной в форме пространства состояний, используются *алгебраические критерии* Р. Калмана. С этой целью составляются матрица управляемости

$$U = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B) \quad (5.71)$$

размера $n \times nt$ (для скалярного входа u и матрица B – вектор-столбец, при этом U – квадратная матрица размера $n \times n$), и матрица наблюдаемости

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

размера $qn \times n$, q – размерность вектора выхода (для скалярного выхода y матрица \mathbf{C} – вектор-строка, при этом \mathbf{H} – квадратная матрица размера $n \times n$).

Критерий управляемости [2]. Система полностью управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости имеет полный ранг, т. е.

$$\text{rank } \mathbf{U} = n. \quad (5.73)$$

Для скалярного входа u критерий приобретает вид $\det \mathbf{U} \neq 0$.

В соответствии с критерием (5.73) свойство управляемости целиком определяется парой матриц (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , поэтому часто говорят об управляемости пары (\mathbf{A}, \mathbf{B}) .

Пара (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , в которой \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, называется полностью управляемой, если система (5.70) полностью управляема.

Для установления свойства нормализуемости («сильной» управляемости) составляются матрицы управляемости:

$$\mathbf{U}_i = (\mathbf{V}_i \quad \mathbf{A}\mathbf{V}_i \quad \mathbf{A}^2\mathbf{V}_i \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{V}_i), \quad i=1, \dots, m,$$

где \mathbf{V}_i – столбцы матрицы \mathbf{B} .

Критерий нормализуемости. Система полностью нормализуема тогда и только тогда, когда для всех $i=1, \dots, m$ выполняются условия

$$\text{rank } \mathbf{U}_i = n.$$

Очевидно, система управляема, если выполняется критерий нормализуемости, однако обратное утверждение неверно. При скалярном управлении оба критерия совпадают.

Критерий наблюдаемости. Система полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости имеет полный ранг, т. е.

$$\text{rank } \mathbf{H} = n. \quad (5.74)$$

Для скалярного выхода y это условие сводится к виду

$$\det \mathbf{H} \neq 0.$$

В соответствии с критерием (5.74) свойство наблюдаемости целиком определяется парой матриц (\mathbf{A}, \mathbf{C}) , поэтому часто говорят о наблюдаемости пары (\mathbf{A}, \mathbf{C}) .

Пара (\mathbf{A}, \mathbf{C}) , в которой \mathbf{A} и \mathbf{C} – матрицы размеров $n \times n$ и $q \times n$ соответственно, называется полностью наблюдаемой, если система (5.70) полностью наблюдаема.

Наблюдаемость систем часто устанавливают по транспонированной матрице

$$\mathbf{H}^T = (\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T)$$

размера $n \times nq$, которая имеет такой же ранг, что и матрица \mathbf{H} .

Рассмотрим две системы S и \tilde{S} , для которых переменные состояния связаны неособым линейным преобразованием $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ так, что

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}.$$

Тогда для преобразованной системы \tilde{S} матрица управляемости

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= (\tilde{\mathbf{B}} \quad \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}}) = \\ &= (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\dots\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}) = \\ &= \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}; \end{aligned}$$

матрица наблюдаемости

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{T} \\ \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\dots\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{T}.$$

Ранги матриц $\tilde{\mathbf{U}}$ и \mathbf{U} , $\tilde{\mathbf{H}}$ и \mathbf{H} одинаковые.

Таким образом, при неособом линейном преобразовании системы ранги матриц \mathbf{U} и \mathbf{H} не изменяются, а следовательно, остаются неизменными свойства управляемости и наблюдаемости. Другими словами, свойства управляемости и наблюдаемости не зависят от выбора переменных состояния.

В том случае, если для одномерных систем S и \tilde{S} известны их матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} , $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$, передаточные функции обеих систем

совпадают, то неособая матрица преобразования \mathbf{T} определяется выражением

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{U}}^{-1}.$$

Пример 5.3. Система управления описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)} = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (5.75)$$

где $Y(s)$ и $U(s)$ – изображения выходной и входной величин.

При $b \rightarrow a$ или $c \rightarrow a$ образуется диполь передаточной функции. Можно показать, что в зависимости от выбора базиса переменных в пространстве состояний, система либо не полностью управляема, либо не полностью наблюдаема.

Из (5.75) получаем дифференциальное уравнение системы

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{du}{dt} + b_1 u, \quad (5.76)$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = b + c$, $a_2 = bc$; $b_0 = 1$, $b_1 = a$. Преобразуем уравнение (5.76) к нормальной системе [1]. Для этого переменную состояния x_1 выбираем так, чтобы выполнялись условия

$$y = (b_0 p + b_1) x_1, \quad (5.77)$$

$$u = (a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_1, \quad (5.78)$$

где $p = d/dt$, а вторую переменную состояния найдем из первого уравнения системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2. \quad (5.79)$$

Тогда из равенства (5.78) получаем второе уравнение

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{a_2}{a_0} x_1 - \frac{a_1}{a_0} x_2 + \frac{u}{a_0}.$$

Таким образом, матрица состояний \mathbf{A} имеет форму Фробениуса

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix},$$

а матрицей входа является столбец

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Равенство (5.77) с учетом (5.79) преобразуется в уравнение выхода

$$y = b_1 x_1 + b_0 x_2,$$

отсюда матрица выхода будет

$$\mathbf{C} = (b_1 \quad b_0).$$

Имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (a \quad 1).$$

Выбранные таким образом переменные состояния x_1, x_2 называются **каноническим управляемым базисом** [2]. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(b+c) \end{pmatrix}; \\ \mathbf{CA} &= (a \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{pmatrix} = (-bc \quad a - (b+c)), \end{aligned}$$

то матрица управляемости имеет размер 2×2 :

$$\mathbf{U} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(b+c) \end{pmatrix},$$

причем $\det \mathbf{U} = -1$, следовательно, $\text{rank } \mathbf{U} = 2$ и система управляема.

Матрица наблюдаемости также имеет размер 2×2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -bc & a - (b+c) \end{pmatrix}; \\ \det \mathbf{H} &= a[a - (b+c)] + bc = (a-b)(a-c). \end{aligned}$$

При $b \rightarrow a$ или $c \rightarrow a$ определитель $\det \mathbf{H} \rightarrow 0$, т. е. ранг матрицы \mathbf{H} становится меньше двух и система становится не полностью наблюдаемой.

Теперь выберем так называемый **канонический наблюдаемый базис**, в котором выходная переменная y является первой по номеру переменной состояния: $x_1 = y$.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$y = x_1 + \beta_0 u,$$

а уравнения состояний имеют вид [13]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + \beta_1 u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{a_0} (a_2 x_1 + a_1 x_2) + \beta_2 u, \end{aligned} \tag{5.80}$$

где коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ необходимо выразить через известные коэффициенты дифференциального уравнения (5.76). Для этого следует систему уравнений (5.80) преобразовать в одно уравнение второго порядка относительно y . Подставляя во второе уравнение (5.80) выражения

$$x_1 = y - \beta_0 u,$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} - \beta_1 u = \frac{dy}{dt} - \beta_0 \frac{du}{dt} - \beta_1 u,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dy}{dt} + \frac{a_2}{a_0} y = \beta_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\beta_1 + \frac{a_1 \beta_0}{a_0} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{a_2}{a_0} \beta_0 + \frac{a_1}{a_0} \beta_1 + \beta_2 \right) u.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых величинах и их производных в этом уравнении и в уравнении (5.76), получаем уравнения относительно искомых коэффициентов β_i ($i = 0, 1, 2$)

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 + \frac{a_1 \beta_0}{a_0} = b_0, \quad \frac{a_1 \beta_1}{a_0} + \beta_2 = b_1,$$

откуда следует

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = b_1 - \frac{a_1 \beta_1}{a_0} = a - (b + c).$$

Таким образом, матрица \mathbf{A} имеет как и в предыдущем случае, форму Фробениуса, матрица входов

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ a - (b + c) \end{pmatrix},$$

а матрица выхода $\mathbf{C} = (1 \ 0)$,

Построенный в этом случае базис из переменных состояния x_1, x_2 называется *каноническим наблюдаемым*.

Теперь

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a - (b+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (b+c) \\ -bc - (b+c)(a-b-c) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{CA} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{pmatrix} = (0 \ 1).$$

Матрица управляемости

$$\mathbf{U} = (\mathbf{B} \ \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & a - (b+c) \\ a - (b+c) & -bc - (b+c)(a-b-c) \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{U} = (a - b)(c - a).$$

При $b \rightarrow a$ или $c \rightarrow a$ определитель $\det \mathbf{U} = 0$, $\text{rank } \mathbf{U} \neq 2$ и система не полностью управляема.

Матрица наблюдаемости

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\det \mathbf{H} = 1$, $\text{rank } \mathbf{H} = 2$, т. е. система наблюдаема.

Следовательно, если система по рассматриваемым входу и выходу неполная (передаточная функция содержит диполи), то она либо не полностью управляема, либо не полностью наблюдаема.

Пример 5.4. Система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u, \\ u &= x_1.\end{aligned}$$

Здесь имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0),$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = (\mathbf{B} \ \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\det \mathbf{U} = -1$, $\text{rank } \mathbf{U} = 2$. Система полностью управляема.

Кроме этого,

$$\mathbf{CA} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1); \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\det \mathbf{H} = 1$, $\text{rank } \mathbf{H} = 2$ и система полностью наблюдаема.

Пример 5.5. Задана система с двумя входами

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 - u_1 + u_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 2x_2 + 2u_2, \\ y &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Будем исследовать управляемость и наблюдаемость системы. Имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 1),$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CA} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3).$$

Следовательно,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{B} \ \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку для этой матрицы существует отличный от нуля минор второго порядка, то $\text{rank } \mathbf{U} = 2$, система полностью управляема.

Матрица наблюдаемости

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$\det \mathbf{H} = 2$, $\text{rank } \mathbf{H} = 2$, система полностью наблюдаема.

Пусть рассматриваются две системы [2]

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (5.81)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{w}}{dt} &= \mathbf{A}^T\mathbf{w} + \mathbf{C}^T\mathbf{g}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{B}^T\mathbf{w}.\end{aligned}\quad (5.82)$$

Для таких систем, которые называются *двойственными* (*сопряженными*), Р. Калманом был установлен *принцип дуальности*: условие полной управляемости системы (5.81), т. е.

$$\text{rank}(\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n$$

означает полную наблюдаемость двойственной системы (5.82), т. е.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{pmatrix} = n;$$

условие полной управляемости системы (5.81), т. е.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

означает полную управляемость двойственной системы (5.82), т. е.

$$\text{rank}(\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T) = n.$$

Другими словами, система управляема, если наблюдаема двойственная ей система, и наоборот. Следовательно, для того, чтобы установить наблюдаемость системы (5.81), достаточно установить управляемость двойственной ей системы (5.82), что

облегчает разработку алгоритмов определения управляемости и наблюдаемости.

Пример 5.6. Установим выполнение принципа дуальности по отношению к системе, представленной передаточной функцией (5.75). Располагая описанием исходной системы в пространстве состояний (см. пример 5.3), получим описание двойственной системы в соответствии с (5.82).

Матрица состояний

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -bc \\ 1 & -(b+c) \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицы двойственной системы, например, в каноническом управляемом базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T &= (0 \quad 1); \quad \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -bc \\ 1 & -(b+c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bc \\ a-(b+c) \end{pmatrix}; \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & -bc \\ 1 & -(b+c) \end{pmatrix} = (1 \quad -(b+c)). \end{aligned}$$

Если исходная система полностью управляема, т. е. ранг матрицы управляемости \mathbf{U} равен 2, то двойственная ей система полностью наблюдаема, поскольку

$$\det(\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(b+c) \end{pmatrix} = -1.$$

Если исходная система полностью наблюдаема, т. е. ранг матрицы наблюдаемости \mathbf{H} равен 2, то двойственная ей система полностью управляема, поскольку

$$\det \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & a-(b+c) \end{pmatrix} = (a-b)(a-c) \neq 0$$

при $a \neq b$, $a \neq c$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Как оценивается качество переходных процессов в системах автоматического управления (САУ)?
2. Чем отличаются прямые и косвенные оценки качества переходных процессов?
3. Как оценивается качество переходных процессов при гармонических воздействиях?
4. Что включают в себя корневые оценки качества процессов?
5. Как можно рассчитать значения степени устойчивости и колебательности при известных параметрах системы?
6. Что называется корневым годографом?
7. Каковы общие свойства корневого годографа?
8. Как вычисляются линейные интегральные оценки качества?
9. Каковы преимущества и недостатки простейшей интегральной квадратичной оценки качества?
10. Как определяются улучшенные интегральные квадратичные оценки качества?
11. Как можно рассчитать переходную характеристику САУ по ее вещественной и мнимой частотным характеристикам?
12. Как можно приблизительно оценить время регулирования по ширине интервала существенных частот замкнутой системы?
13. Каковы зависимости времени регулирования и перерегулирования от максимума вещественной частотной характеристики замкнутой системы?
14. Как зависит показатель колебательности от значений вещественной и мнимой частотных характеристик разомкнутой системы?
15. Что такое запретная область на плоскости логарифмической фазочастотной характеристики?
16. Какая система называется полностью управляемой? Каков критерий полной управляемости САУ?
17. Какая система называется полностью наблюдаемой? Каков критерий полной наблюдаемости САУ?
18. Какие системы называются двойственными (сопряженными)?

ГЛАВА 6. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Задачи синтеза систем управления [2]

Целью синтеза является *построение математической модели системы управления, удовлетворяющей требованиям к поведению*: ковариантности с задающим воздействием; инвариантности к возмущениям; устойчивости и грубости (робастности).

Первой проблемой, которая решалась теорией автоматического управления, было обеспечение устойчивости автоматических систем. Позднее центральной задачей стало достижение необходимого качества регулирования. Систематизация и обобщение накопленных знаний привели к созданию методов научного проектирования (синтеза) систем с заданными показателями точности регулирования и быстродействия.

Пусть имеется математическая модель объекта управления со связями со средой (рис. 6.1). В задачах синтеза алгоритмов управления к объекту ОУ или неизменяемой части относят исполнительные механизмы ИМ и измерительные элементы ИЭ, как это показано на рис. 6.1. При этом входом $u(t)$ и выходом $y(t)$ расширенного объекта оказываются маломощные сигнала-

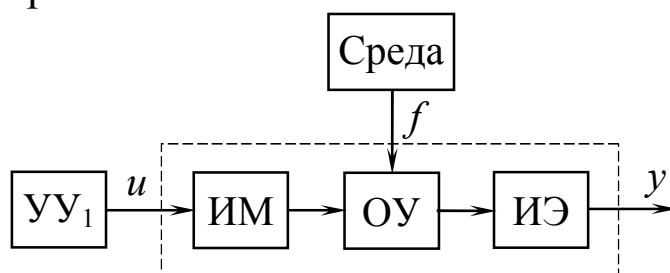


Рис. 6.1. Система с расширенным объектом управления

лы – носители информации.

Средствами решения задачи синтеза в указанной постановке являются: выбор структур систем (т. е. элементов и топологии причинно-следственных связей между ними), структур операторов элементов (в частности, алгоритмов управляющих устройств) и значений их параметров (например, настроек регуляторов).

Удовлетворению требований к поведению систем обычно препятствуют динамические свойства объектов управления и других элементов неизменяемой части, недоступность полной

априорной информации о свойствах элементов системы и среды, невозможность получения всей текущей информации о состоянии объекта и возмущениях, ограничения на переменные системы и управляющие воздействия.

Более общей по сравнению с синтезом является задача *проектирования* систем управления. Несмотря на то, что требования к поведению систем управления являются доминирующими, при проектировании необходимо учитывать и другие требования и ограничения, содержащиеся в технических заданиях: надежность систем, их приемлемую стоимость, требования энергетического характера, ограничения, связанные с типом сигналов, массой и габаритами систем, компоновкой элементов и трассировкой связей и т. д. Для расчетов систем с учетом таких требований привлекаются модели и методы, отличные от рассматриваемых в традиционных курсах теории управления.

Для решения задач анализа – проверки соответствия поведения системы требованиям – необходимо иметь описание системы, среды и требований. Если система не удовлетворяет требованиям, то принимается решение о необходимости синтеза.

Рассмотрим основные задачи синтеза систем управления.

Синтез управляющих воздействий. Приложенное к объекту допустимое управляющее воздействие $u(t) \in U$ должно обеспечить в некотором смысле наилучшее поведение объекта. Задача синтеза математически ставится как поиск функции времени $u^*(t)$, доставляющей минимум (максимум) некоторому функционалу

$$J(y(t), u(t), f(t)) \rightarrow \min(\max)$$

с учетом динамических свойств объекта, ограничений на его переменные состояния, а также тех возмущений $f(t)$, о которых имеется полная априорная информация. Решение сводят к поиску условных экстремалей функционалов, для чего привлекаются методы классического вариационного исчисления, динамического программирования и принцип максимума.

Управляющее воздействие $u^*(t)$ генерируется управляющим устройством $УУ_1$ (см. рис. 6.1) и обеспечивает оптимальную траекторию движения объекта $y^*(t)$.

Во многих технических объектах оптимальное управление постоянно $u^* = \text{const}$ и обеспечивает оптимальный режим $y^* = \text{const}$, определяемый из требований технологии.

Синтез компенсаторов возмущений. Если на объект действуют возмущения $f(t)$, которые не учтены при синтезе оптимального управления $u^*(t)$, то поведение объекта будет отличаться от оптимального. В случае недопустимых отклонений соответствующей траектории (режима) необходимо принять меры по ослаблению влияния возмущений.

Пусть возмущение измеряется непосредственно (рис. 6.2). Задачей синтеза является определение алгоритма управляющего устройства $УУ_2$, в котором происходит обработка текущей информации о возмущении и формирование воздействия $u_2(t)$ на объект. Часть управляющего устройства, формирующую компенсирующее воздействие, называют также компенсатором (К).

Образование канала компенсации, в принципе, может обеспечить абсолютную инвариантность управляемой переменной к непосредственно измеряемому возмущению.

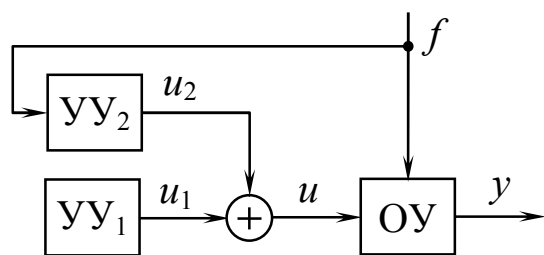


Рис. 6.2. Компенсация возмущения

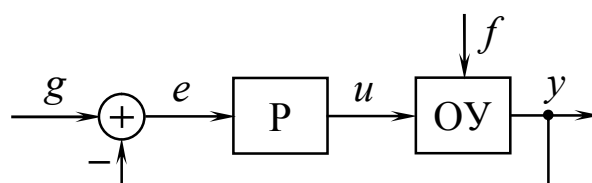


Рис. 6.3. Система с внутренним компенсатором возмущения

Синтез систем управления из условия подавления непосредственно неизмеряемых возмущений.

Если к объекту приложены постоянно действующие некомпенсированные возмущения $f(t)$, то единственным средством ослабления их влияния на управляемую переменную $y(t)$ является создание контуров обратной связи с достаточно большим усилением на частотах возмущений. Необходимое усиление контура обеспечивается введением *внутренних компенсаторов* возмущений (рис. 6.3).

Селективная абсолютная инвариантность достигается, если внутренний компенсатор «моделирует среду» – его передаточная функция имеет полюсы, равные полюсам изображения воз-

мушения с учетом их кратности. Из-за бесконечного усиления контура на комплексных частотах возмущения установившаяся реакция системы равна нулю. Селективная инвариантность до ε обеспечивается, если на частотах возмущений усиления контура достаточно велики.

Пусть измеряются непосредственно выходная переменная объекта и основное возмущение. Тогда создают *комбинированные* системы управления, реализующие оба принципа управления – по замкнутому и разомкнутому циклам. Канал компенсации обеспечивает инвариантность к основному возмущению (например, току нагрузки электрического генератора, моменту сопротивления на валу двигателя), а обратная связь ослабляет влияние непосредственно неизмеряемых возмущений, а также вариаций операторов.

Компенсация главного возмущения позволяет снизить требования к астатизму системы и усилению контура обратной связи. Это, в свою очередь, облегчает решение задачи стабилизации системы и удовлетворения требований к переходным процессам.

Синтез следящих систем управления. В так называемых следящих системах управляемая переменная $y(t)$ должна воспроизводить заранее неизвестное воздействие $g(t)$, т. е. должна быть ковариантной с ним. Текущая информация обычно может быть получена только об ошибке слежения

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

В этом случае строится система с обратной связью (см. рис. 6.3), а задачей синтеза является определение алгоритма регулятора P

$$u(t) = R(e(t)),$$

обеспечивающего воспроизведение задающего воздействия с требуемой точностью. Ошибка $e(t)$ должна быть инвариантной к заданию $g(t)$ и возмущениям $f(t)$.

В следящих системах без непосредственного измерения задающего воздействия нельзя реализовать абсолютную инвариантность ошибки к заданию. Селективная абсолютная инвариантность достигается, если ввести в контур внутренний компенсатор воздействия P (см. рис. 6.3), полюсы передаточной функции которого равны полюсам изображения воздействия $g(t)$.

Легко видеть, что в обеих системах – подавления возбуждающих воздействий и воспроизведения задания – ошибка $e(t)$ должна быть инвариантной к воздействиям. Разница между задачами синтеза этих систем заключается в том, что основные требования в первом случае относятся к точности подавления возмущения, во втором – к точности воспроизведения задания.

Коррекция систем управления. Создание контуров обратной связи и повышение их усиления, введение в контуры внутренних компенсаторов, передаточные функции которых имеют полюсы, равные полюсам изображений воздействий, обычно приводит к тому, что замкнутая система с удовлетворительными установившимися движениями будет иметь плохие переходные процессы или даже окажется неустойчивой. Это часто происходит, когда спектры воздействий близки к спектру объекта, т. е. усиления контура повышается на частотах объекта, вызывая существенное перемещение полюсов передаточной функции объекта.

Если средства, обеспечивающие инвариантность ошибки к непосредственно неизменяемым воздействиям, приводит к неустойчивости замкнутой системы, то необходимо разрешить это противоречие между качеством установившихся и переходных процессов. Такая задача называется *коррекцией*.

Синтез систем с обратной связью в общем случае является весьма сложной задачей. Ее сложность обусловлена разнообразием требований: одновременно необходимо обеспечить инвариантность к возмущениям, ковариантность с задающим воздействием, устойчивость движений, а также, по возможности, малую чувствительность перечисленных свойств. Эти требования обычно оказываются противоречивыми, что превращает процедуру синтеза регуляторов в последовательность принятия компромиссных решений.

Частично упростить задачу синтеза возможно в случае линейных моделей, когда установившиеся и переходные составляющие движений в какой-то мере можно формировать отдельно. Декомпозиция возможна при условии, когда собственные движения системы более быстрые по сравнению с воздействиями среды. Это означает, что модули полюсов передаточ-

ной функции системы должны быть больше модулей полюсов воздействий.

Таким образом, процедура синтеза систем подавления возмущений и воспроизведения задания складывается из двух основных этапов:

- 1) синтез компенсатора по требованиям к установившимся процессам;
- 2) коррекция по требованиям к переходным процессам.

При этом управляющее устройство представляется как совокупность компенсатора воздействия, обеспечивающего установившуюся точность, и звена коррекции, обеспечивающего устойчивость и требуемое качество переходных процессов.

Синтез регуляторов для неустойчивых объектов. Оптимальные траектории $y^*(t)$, в частном случае – оптимальный режиму $y^* = \text{const}$ – могут быть неустойчивыми или вариации движений могут затухать недостаточно быстро. Тогда ставится задача стабилизации неустойчивого режима и обеспечения требуемого характера переходных процессов.

Для изменения характера собственных движений необходимо создать систему с обратной связью (рис. 6.4, а), т. е. реализовать принцип управления по замкнутому циклу. Управляющее устройство $УУ_3$, обеспечивающее устойчивость и качество процессов в окрестности оптимального режима, называют также регулятором (Р).

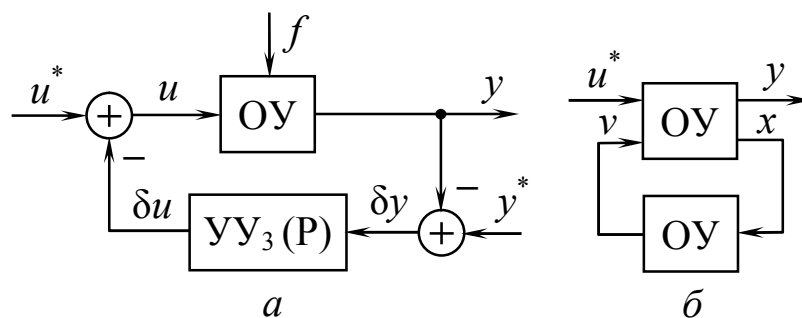


Рис. 6.4. Стабилизация неустойчивого режима

Задачей синтеза в этом случае является определение алгоритма регулирования

$$\delta u(t) = R(\delta y(t)),$$

а именно, его типа (структуры) и настроек (параметров).

Вообще говоря, стабилизирующая обратная связь может включаться и иначе (рис. 6.4, б): измеряется некоторая внут-

ренная переменная $x(t)$ и на объект оказывается воздействие по дополнительному входу $v(t)$. При наличии нескольких мест возможного включения регулятора возникает задача топологического синтеза – выбора наилучшего места.

Во многих практически важных случаях задача стабилизации решается по математическим моделям, линеаризованным для малых отклонений от рассматриваемого режима.

Расчет настроек типовых регуляторов. Большинство локальных систем управления промышленной автоматики имеют типовую одноконтурную структуру (см. рис. 6.3) с управляющими устройствами, реализующими типовые алгоритмы. Это объясняется универсальностью обратной связи и тем, что динамические свойства большинства объектов также принадлежат к нескольким типам. Таким образом, системы имеют определенную топологию и структуры операторов, но остаются неопределенными параметры управляющих устройств, которые в системах стабилизации и следящих системах обычно называются регуляторами.

Параметры настроек типовых регуляторов рассчитываются из условий устойчивости, максимизации точности поддержания установившихся режимов, минимизации динамических ошибок.

Синтез систем управления в условиях неполной определенности моделей. Даже при точной реализации алгоритма управления, синтезированного на базе полностью определенной модели, реальная система, вообще говоря, будет иметь другое поведение, так как реальная динамика объекта отличается от модельной. Поэтому любой метод синтеза имеет смысл только в том случае, если он по меньшей мере гарантирует, что малые вариации характеристик элементов не вызовут больших изменений поведения систем. Синтезированная система должна быть грубой – это необходимое условие применимости методов синтеза. Практически же требуется робастность основных свойств – система управления должна быть работоспособной при конечных изменениях характеристик элементов.

Коэффициенты передачи замкнутых систем малочувствительны к вариациям характеристик некоторых элементов на частотах, где усиления контуров велики. Наличие контура является

необходимым структурным (топологическим) условием стабилизации неустойчивых объектов, ослабления сигнальных и операторных возмущений. В этом состоит универсальность действия обратной связи.

При синтезе систем частотными методами можно контролировать диапазоны частот, на которых вариации характеристик элементов оказывают незначительное влияние на характеристики систем. Для количественной оценки влияния вариаций элементов на условия инвариантности систем можно использовать функции чувствительности.

Если вариации элементов велики и/или усиления контуров на требуемых частотах не могут быть повышены, то необходимы активные средства ослабления влияния вариаций элементов на свойства систем. В этих случаях строят адаптивные системы управления, в которых за счет обработки текущей информации о динамических свойствах объектов происходит перестройка алгоритма управляющего устройства.

Задачи синтеза адаптивных систем решаются вне рамок линейной теории управления.

6.2. Синтез систем управления, инвариантных к воздействиям

Инвариантность управляемой переменной к возмущениям – одно из основных свойств систем управления.

Если о возмущении имеется полная текущая, а о модели объекта – полная априорная информация, то теоретически возможна полная компенсация возмущения – достижение абсолютной инвариантности переменной выхода объекта к возмущению.

Инвариантность систем с типовой структурой. Рассмотрим, как может быть обеспечена инвариантность (ковариантность) в системах управления, имеющих различные структуры, т. е. реализующих различные принципы управления.

Последовательная компенсация воздействия. Для подавления возмущения, приложенного к объекту, теоретически можно применить последовательную компенсацию (рис. 6.5, а).

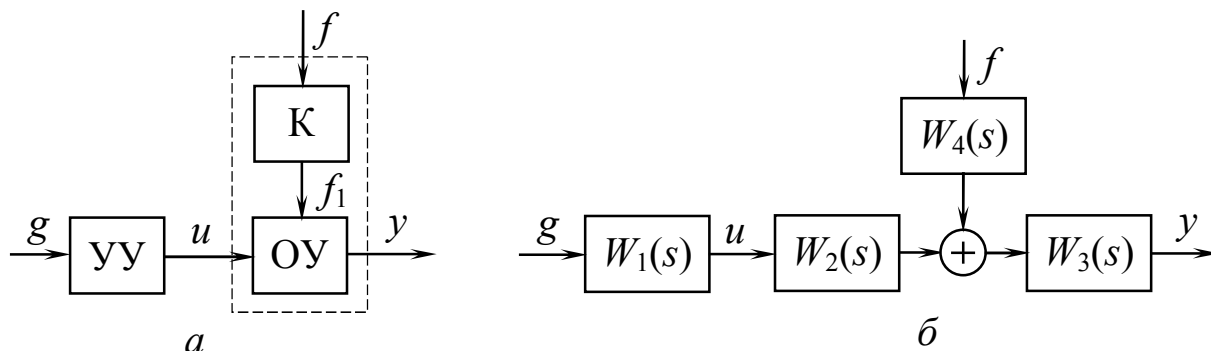


Рис. 6.5. Последовательная компенсация возмущения (а), структурная модель системы (б)

На структурной модели (рис. 6.5, б) $W_1(s)$ и $W_4(s)$ – передаточные функции устройства управления УУ и компенсатора К; $W_2(s)W_3(s)$ и $W_3(s)$ – передаточные функции объекта управления ОУ по каналам управления и возмущения. Очевидно, что абсолютная инвариантность выходной переменной объекта y имеет место, если выполняется условие

$$W_3(s)W_4(s) \equiv 0.$$

Отсюда получим тривиальное условие нулевого усиления компенсатора на всех частотах. Инвариантность до ε достигается, если для всех s

$$|W_3(s)W_4(s)| < \varepsilon.$$

Селективная абсолютная инвариантность к воздействию с полюсами изображения s_k имеет место при условии, что для каждого полюса s_k

$$W_3(s_k)W_4(s_k) = 0.$$

Это означает, что передаточная функция компенсатора (или объекта) должна иметь нули, равные полюсам возмущения. Например, в случае постоянного возмущения $f = f_0$

$$F(s) = f_0/s$$

условие селективной абсолютной инвариантности сводится к наличию нулевого нуля у передаточной функции $W_4(s)$. Это обеспечит нулевую установившуюся реакцию объекта при любом уровне f_0 постоянного воздействия. Если сам объект по каналу возмущения имеет интегрирующие свойства, т. е. передаточная функция $W_3(s)$ имеет нулевой полюс, то передаточная функция $W_4(s)$ должна иметь двукратный нулевой нуль.

Следует иметь в виду, что на выходе объекта будут наблюдаться переходные процессы из-за посленазначенных условий, вы-

званных ступенчатым изменением воздействия. Другими причинами изменения выхода объекта могут быть ненулевые предначальные условия и другие некомпенсированные воздействия.

Хотя последовательная компенсация возмущения выглядит весьма привлекательно, ее реализация обычно связана с изменением конструкции самого объекта, технологии управляемого процесса. В качестве простого примера ослабления действия помех, приложенных к объектам электрической природы, можно указать на экранирование проводов от внешних магнитных полей.

Для достижения ковариантности управляемой переменной $y(t)$ с задающим воздействием $g(t)$ управляющее устройство соединяют последовательно с объектом (рис. 6.6). Выполнение условий абсолютной ковариантности:

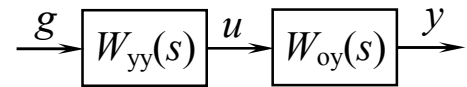


Рис. 6.6. Обеспечение ковариантности

$$\begin{aligned} W_{oy}(s)W_{yy}(s) &\equiv 1, \\ W_{yy}(s) &\equiv 1/W_{oy}(s) \end{aligned} \quad (6.1)$$

наталкивается на проблему реализуемости управляющего устройства. Так как объект обычно инерционный, полином знаменателя его передаточной функции по каналу управления $W_{oy}(s)$ имеет степень выше, чем степень полинома числителя. Следовательно, для реализации условия (6.1) передаточная функция устройства управления должна иметь степень числителя, более высокую, чем степень знаменателя.

Селективная абсолютная ковариантность вполне реализуема, так как условие (6.1) в этом случае должно выполняться только на полюсах задающего воздействия, т. е. при $s = s_k$, $k = 1, 2, \dots, n_G$. Например, если известно, что задающее воздействие постоянно, то при условии

$$W_{oy}(0)W_{yy}(0) = 1$$

установившиеся значения переменной выхода объекта будут в точности равны заданию. Необходимо, чтобы коэффициент усиления управляющего устройства был равен величине, обратно пропорциональной коэффициенту усиления объекта по каналу управления.

Параллельная компенсация воздействия. Параллельная компенсация возмущения является мощным средством обеспе-

чения инвариантности к основному возмущению на объект, если это возмущение может быть измерено.

Пусть задана схема системы (рис. 6.7, а). Введем корректирующее устройство $W_k(s)$, входом которого является возмущающее воздействие $f(t)$ (рис. 6.7, б).

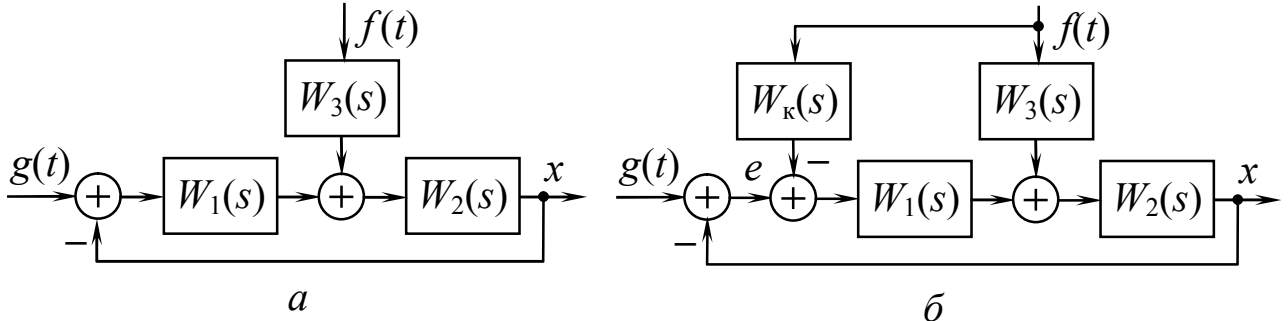


Рис. 6.7. Структурные модели системы управления с задающим $g(t)$ и возбуждающим $f(t)$ воздействиями: исходная (а), с параллельной компенсацией возмущения (б)

Для скомпенсированной схемы (рис. 6.7, б) справедливо равенство

$$\{[G - X - W_k(s)F]W_1(s) + W_3(s)F\}W_2(s) = X,$$

откуда следует

$$X = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}G + \frac{[W_3(s) - W_1(s)W_k(s)]W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}F. \quad (6.2)$$

Поскольку внешнее возмущение $f(t)$ надо уничтожить, то условие полной инвариантности принимает вид

$$W_k(s) = \frac{W_3(s)}{W_1(s)}. \quad (6.3)$$

Точное выполнение условия (6.3) может вызвать технические трудности, поскольку передаточная функция $W_k(s)$ может оказаться физически неосуществимой. Тогда обычно возможно приближенное обеспечение равенства (6.3), для определенной области частот.

Обратим внимание на то, что выполнение условия (6.3) не влияет на характеристическое уравнение замкнутой системы $1 + W_1(\lambda)W_2(\lambda) = 0$, а следовательно, на качество свободного переходного процесса.

Обеспечение инвариантности за счет обратной связи. Поскольку для системы управления (рис. 6.7, а) справедливо равенство:

$$[W_1(s)(G - X) + W_3(s)F]W_2(s) = X,$$

получаем

$$X = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}G + \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}F,$$

где G , X и F – изображения по Лапласу соответствующих сигналов.

Отсюда видно, что абсолютная инвариантность управляемой переменной x достигается при тождественном равенстве нулю передаточной функции

$$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}, \quad (6.4)$$

а это означает, что при условиях

$$W_3(s) \neq 0; \quad |W_3(s)| < \infty$$

абсолютная инвариантность может быть обеспечена за счет бесконечного усиления разомкнутого контура на всех частотах

$$|W_1(j\omega)W_2(j\omega)| \rightarrow \infty.$$

Однако при повышении усиления контура возникает проблема устойчивости замкнутой системы. Поэтому условие абсолютной инвариантности только за счет обратной связи не может быть реализовано.

При конечном усилении и отрицательной обратной связи, как следует из формулы (6.4), происходит ослабление влияния возмущения на выход системы. Можно сказать, не оговаривая значение ε , что системы с обратной связью инвариантны до ε к возмущениям.

Селективная инвариантность выхода системы с отрицательной обратной связью к возмущениям с полюсами его изображения $\{s_k\}$ имеет место, если передаточная функция замкнутой системы (6.4) обращается в нуль на полюсах $\{s_k\}$, т. е. имеет такие же нули [2].

Корректирующие устройства по задающему воздействию. Здесь наряду с сигналом ошибки вводится во внутреннюю цепь системы еще сигнал задающего воздействия $g(t)$ через некоторую передаточную функцию $W_k(s)$ (рис. 6.8).

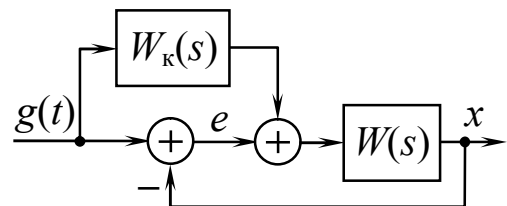


Рис. 6.8. Введение корректирующего устройства по задающему воздействию

Тогда справедливы равенства относительного изображений сигналов

$$\begin{aligned} X(s) &= [E(s) + W_k(s)G(s)]W(s), \\ E(s) &= G(s) - X(s), \end{aligned}$$

откуда имеем изображение выходного сигнала

$$X(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} [1 + W_k(s)] G(s), \quad (6.5)$$

и ошибки регулирования

$$E(s) = \frac{1 - W_k(s)W(s)}{1 + W(s)} G(s). \quad (6.6)$$

Как видно из (6.5) и (6.6), при условии

$$W_k(s) = \frac{1}{W(s)} \quad (6.7)$$

имеют место равенства $X(s) = G(s)$ и $E(s) = 0$, т. е. обеспечивается ковариантность выходной переменной $x(t)$ с задающим воздействием $g(t)$ и нулевая ошибка воспроизведения воздействия, т. е. абсолютная инвариантность переменной $e(t)$ к воздействию $g(t)$.

6.3. Обеспечение требуемой точности воспроизведения задающего воздействия

Говоря о точности следящих систем, прежде всего, имеют в виду малую установившуюся ошибку воспроизведения задающего воздействия. Примем за выход следящей системы с единичной отрицательной обратной

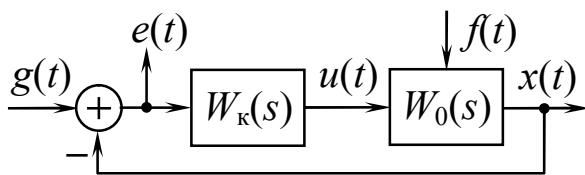


Рис. 6.9. Структура следящей системы

связью (рис. 6.9) ошибку регулирования $e(t)$. Тогда задачей синтеза следящей системы, в первую очередь, является определение передаточной функции

последовательного корректирующего устройства $W_k(s)$, обеспечивающего селективную инвариантность переменной $e(t)$ к воздействию $g(t)$.

При решении этой задачи сохраняются в силе основные положения синтеза систем, инвариантных к возмущению.

При выборе структуры корректирующего устройства (внутреннего компенсатора воздействия) необходимо учитывать, что объекты управления следящих систем обычно астатические (например, двигатели с редукторами). Тогда при определении числа нулевых полюсов передаточной функции $W_k(s)$ необходимо учесть наличие таких полюсов у передаточной функции $W_0(s)$ объекта по каналу управления.

В случае гармонического воздействия (3.29)

$$g(t) = a_g \sin \omega_g t$$

амплитуда устанавливающей ошибки равна

$$a_e = |\Phi_e(j\omega_g)| a_g, \quad (6.8)$$

где

$$\Phi_e(j\omega) = \frac{1}{1 + W_0(j\omega)W_k(j\omega)} = \frac{1}{1 + W(j\omega)}$$

представляет собой частотную характеристику замкнутой системы по ошибке.

Поскольку в полосе пропускания разомкнутой системы усиление разомкнутого контура намного больше единицы, то

$$|W(j\omega)| \gg 1$$

и АХЧ замкнутой системы по ошибке

$$|\Phi_e(j\omega)| \approx \frac{1}{|W(j\omega)|}. \quad (6.9)$$

тогда с учетом (6.8) имеем

$$a_e \approx \frac{a_g}{|W(j\omega_g)|}, \quad (6.10)$$

откуда следует, что для обеспечения значения ошибки a_e , не превышающего допустимое значение A_e , необходимо выполнение условия

$$\omega = \omega_g, \quad L(\omega_g) = 20 \lg |W(j\omega_g)| \geq 20 \lg \frac{a_g}{A_e}. \quad (6.11)$$

Условие (6.11) используется при построении низкочастотной области желаемой ЛАХЧ разомкнутой системы. ЛАХЧ разомкнутой системы должна проходить выше показанной на рис. 6.10 запретной области. Точка с координатами ω_g , $20 \lg(a_g/A_e)$ называется **контрольной**.

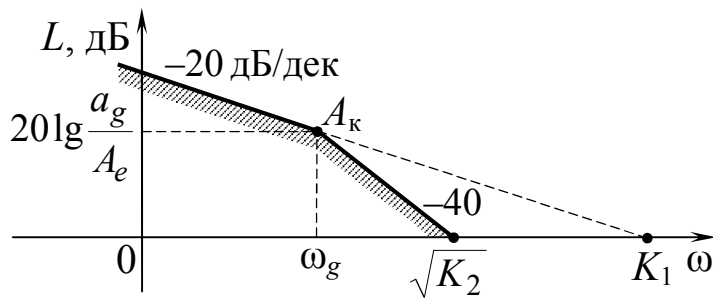


Рис. 6.10. Запретная область ЛАЧХ по условиям точности регулирования

Часто следящая система должна воспроизводить задающие воздействия, о которых известно лишь, что скорость их изменения не превосходит \dot{g}_{\max} , а ускорение — значения \ddot{g}_{\max} .

Тогда целесообразно рассматривать эквивалентный гармонический задающий сигнал, частота и амплитуда которого определяются по формулам (3.33):

$$\omega_3 = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}; \quad a_{g3} = \frac{\dot{g}_{\max}^2}{\ddot{g}_{\max}}.$$

Аналогично (6.11) можно записать

$$L(\omega_3) = 20 \lg |W(j\omega_3)| \geq 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}^2}{A_e \ddot{g}_{\max}}. \quad (6.12)$$

Если амплитуда первой производной \dot{g}_{\max} остается равной максимальному значению, а амплитуда второй производной уменьшается, то частота контрольной точки ω_3 будет пропорционально уменьшаться, а амплитуда a_{g3} пропорционально возрастать. При этом контрольная точка A_k на рис 6.10 будет перемещаться в область более низких частот (влево) по прямой, имеющей отрицательный наклон 20дБ/дек,

$$L(\omega_3) = 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}}{A_e \omega_3} = 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}}{A_e} - 20 \lg \omega_3, \quad (6.13)$$

которая получается из (6.12) при замене $\ddot{g}_{\max} = \dot{g}_{\max} \omega_3$.

Если амплитуду второй производной \ddot{g}_{\max} устремить к нулю, то частота $\omega_3 \rightarrow 0$. Это соответствует работе с постоянной скоростью $\dot{g} = \dot{g}_{\max}$ с линейно изменяющимся задающим воздействием

$$g(t) = \dot{g}_{\max} t.$$

Заданное значение максимальной ошибки воспроизведения задающего воздействия A_e в этом случае связано с \dot{g}_{\max} зависимостью

$$K_1 = \frac{\dot{g}_{\max}}{A_e}, \quad (6.14)$$

где K_1 – минимально необходимое значение коэффициента усиления разомкнутой системы (добротности по скорости) с астатизмом первого порядка на частоте ω_3 [9].

Рассмотрим теперь режим, когда амплитуда \ddot{g}_{\max} второй производной задающего воздействия остается постоянной, а амплитуда первой производной \dot{g}_{\max} меньше заданного максимального значения. Тогда из равенства (6.12) следует, что контрольная точка A_k на рис. 6.10 будет перемещаться в область более высоких частот, двигаясь по прямой

$$L(\omega_3) = 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}^2}{A_e \ddot{g}_{\max}} = 20 \lg \frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e \omega_3^2} = 20 \lg \frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e} - 40 \lg \omega_3, \quad (6.15)$$

которая получается из (6.12) при замене $\dot{g}_{\max} = \ddot{g}_{\max} / \omega_3$. Как видно из (6.15), при уменьшении $\dot{g}_{\max} = \ddot{g}_{\max} / \omega_3$ и увеличении частоты ω_3 контрольная точка A_k двигается вправо по прямой, имеющей отрицательный наклон 40 дБ/дек (двойной наклон). Для точки пересечения этой прямой с осью частот согласно равенству (6.15) справедливо уравнение

$$\frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e \omega_3^2} = 1,$$

откуда следует

$$\omega_3^2 = \frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e}. \quad (6.15)$$

Квадрат частоты точки пересечения прямой (6.15) с осью частот равен минимально необходимому коэффициенту усиления разомкнутой системы (добротности по ускорению)

$$K_2 = \frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e} \quad (6.16)$$

с астатизмом второго порядка.

Область, расположенная ниже двух пересекающихся прямых с наклонами -20 дБ/дек и -40 дБ/дек (рис. 6.10), представляет собой запретную область для ЛАЧХ проектируемой системы. При работе с ограниченными значениями первой и второй производных от задающего воздействия, не превышающими значе-

ний \dot{g}_{\max} и \ddot{g}_{\max} максимальная ошибка регулирования не будет превышать заданного значения A_e [9].

Как следует из вида запретной области на рис. 6.10, задание ограничений только на первую и вторую производные задающего воздействия при отсутствии ограничений на сам сигнал $g(t)$ приводит к необходимости использования только астатических систем автоматического регулирования [9].

Желаемая ЛАЧХ разомкнутой системы проводится выше запретной области через точку, расположенную на частоте ω_3 не меньше чем на 3дБ выше контрольной точки (рис. 6.11).

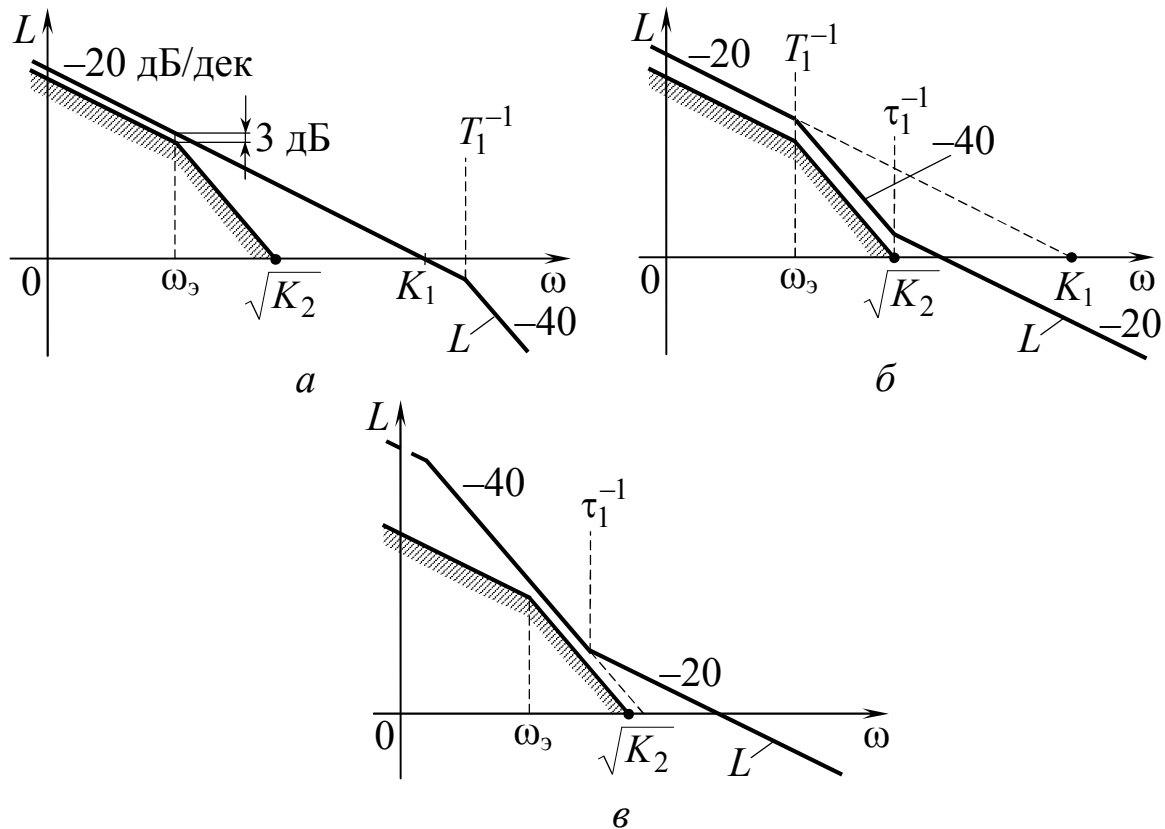


Рис. 6.11. Расположение низкочастотной части ЛАЧХ относительно запретной области по точности

Совпадение изломов асимптотической желаемой ЛАЧХ и запретной области, как на рис. 6.11, б, не являются обязательным условием. Можно сдвинуть излом асимптотической ЛАЧХ (изменить постоянную времени T_1 влево (рис. 6.11, в) и вправо (рис. 6.11, а). Однако при этом действительная ЛАЧХ не должна заходить в запретную область.

Статические системы. В статических системах при постоянном во времени входном воздействии $g(t) = g_0$ и единичной

обратной связи установившаяся ошибка определяется выражением

$$e_{уст} = \frac{g_0}{1+W(0)} = \frac{g_0}{1+K}, \quad (6.17)$$

где $K=W(0)$ – общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Если в системе регулирования применить обратную связь, отличную от единичной и положить $W_{oc}(p) = m$ (рис. 6.12), то передаточная функция разомкнутой системы примет вид $W(p)=mW(p)$.

Тогда справедливо уравнение

$$(G - mX)W(s) = X,$$

откуда следует

$$X = \frac{W(s)}{1 + mW(s)} G,$$

где $X = X(s)$, $G = G(s)$ – изображения величин x и g .

Полагая что ошибка регулирования по-прежнему определяется как разность $g - x$, находим изображение ошибки

$$E = \frac{1 + mW(s) - W(s)}{1 + mW(s)} G$$

и установившуюся ошибку при постоянном задающем воздействии $g(t) = g_0$

$$e_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + mW(s) - W(s)}{1 + mW(s)} \frac{g_0}{s} = \frac{1 + mW(0) - W(0)}{1 + mW(0)} g_0, \quad (6.18)$$

Приравняв числитель (6.18) нулю, получаем условие отсутствия статической ошибки при постоянном входном воздействии:

$$m = \frac{K - 1}{K}. \quad (6.19)$$

При нестабильном коэффициенте усиления условие (6.19) нарушается, что ведет к появлению статической ошибки. Положив $K = K_0 + \Delta K$, где K_0 – исходное значение коэффициента усиления, а ΔK – его приращение, и дифференцируя выражение (6.18) по $K = W(0)$, получим значение статической ошибки в виде

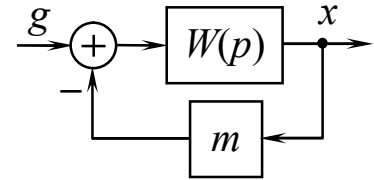


Рис. 6.12. Система с неединичной обратной связью

$$e_{уст} = g_0 \left. \frac{d}{dK} \frac{1+mK-K}{1+mK} \right|_{K=K_0} \Delta K = -g_0 \frac{\Delta K}{(1+mK_0)^2} = -\frac{\Delta K}{K_0} \frac{g_0}{K_0},$$

где принято $m = (K_0 - 1)/K_0$.

Отсюда можно получить требуемое значение коэффициента усиления разомкнутой системы

$$K_0 \geq \frac{g_0}{e_{уст}} \frac{\Delta K}{K_0}, \quad (6.20)$$

В статической системе с единичной обратной связью при гармоническом входном воздействии $g(t) = a_g \sin \omega_g(t)$ амплитуда ошибки по-прежнему определяется формулами (6.8) и (6.10). Это позволяет определить контрольную точку A_k с координатами (6.11) аналогично построению на рис. 6.10. Если заданы максимальные по модулю значения задающего воздействия $a_{g\max}$ и скорость ее изменения \dot{g}_{\max} , то можно подобрать эквивалентный гармонический входной сигнал

$$g_{\omega}(t) = a_{g\omega} \sin \omega_{\omega} t,$$

где $a_{g\omega} = a_{g\max}$, а эквивалентная круговая частота выбирается из условия $\omega_{\omega} a_{g\max} = \dot{g}_{\max}$. Тогда при заданной максимальной ошибке A_e координаты контрольной точки на рис. 6.13, а

$$\omega_{\omega 1} = \frac{\dot{g}_{\max}}{a_{g\max}}, \quad L(\omega_{\omega 1}) = 20 \lg \frac{a_{g\max}}{A_e}. \quad (6.21)$$

При $a_{g\omega} = a_{g\max} = \text{const}$ и уменьшении частоты ω_{ω} по сравнению с $\omega_{\omega 1}$ за счет уменьшения \dot{g}_{\max} ордината контрольной точки остается равной $L(\omega_{\omega 1})$. Точка A_k будет перемещаться влево по

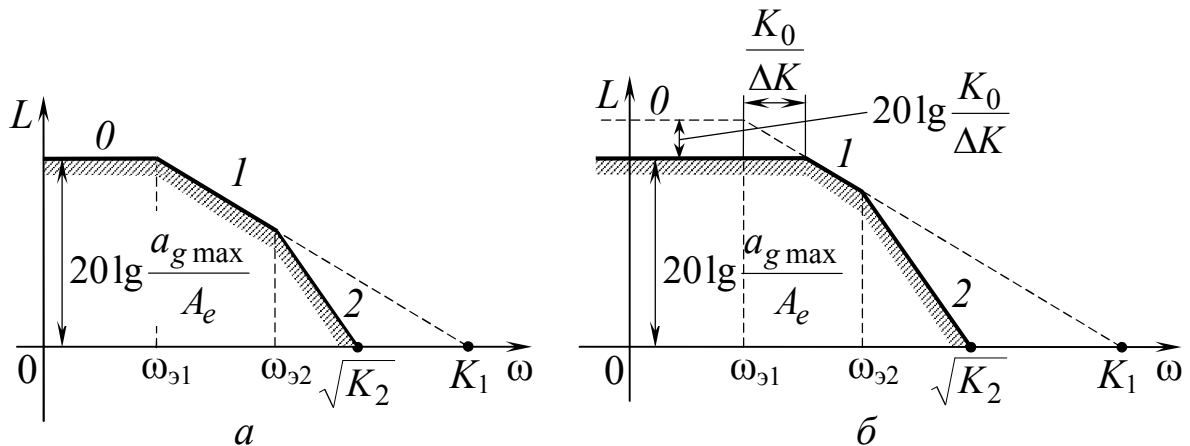


Рис. 6.13. Запретные области по условиям точности для статических систем: с единичной обратной связью (а), с неединичной обратной связью (б)

горизонтальной прямой. Если частота ω_3 начнет увеличиваться по сравнению с ω_{31} , что при $\dot{g}_{\max} = \text{const}$ возможно за счет уменьшения амплитуды эквивалентного гармонического сигнала a_{g_3} , то ордината контрольной точки будет определяться из равенства (6.13).

Контрольная точка будет двигаться вправо по прямой с отрицательным наклоном 20дБ/дек. Это справедливо до тех пор, пока ускорение эквивалентного режима меньше заданного \ddot{g}_{\max} , т. е. пока выполняется условие $\omega_3 \dot{g}_{\max} \leq \ddot{g}_{\max}$.

Отсюда находится предельная частота контрольной точки A_k на прямой с наклоном -20 дБ/дек

$$\omega_{32} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}. \quad (6.22)$$

При дальнейшем увеличении частоты ω_3 контрольная точка A_k будет двигаться по прямой с наклоном -40 дБ/дек, как на рис. 6.10 после частоты ω_g .

Если в статической системе используется неединичная обратная связь $m \neq 1$, то в соответствии (6.17) и (6.20) верхняя граница запретной области может быть снижена на значение $20 \lg(K_0/\Delta K)$. Это показано на рис. 6.13, б.

Учет возмущений. Если к проектируемой системе (рис. 6.9) кроме полезного входного воздействия $g(t)$ приложено внешнее возмущение $f(t)$, то при построении контрольной точки или запретной области необходимо учесть дополнительную ошибку, вносимую этим возмущением. Наиболее просто это делается для возмущения вида $f(t) = f_0 = \text{const}$.

Тогда дополнительная статическая ошибка, вызываемая этим возмущением равна

$$e_{\text{ст}} = \frac{W_f(0)f_0}{1 + W(0)}, \quad (6.23)$$

где $W_f(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы по возмущению $f(t)$.

В статических системах формула (6.23) принимает вид

$$e_{\text{ст}} = \frac{\gamma f_0}{1 + K} = \frac{g_f}{1 + K}, \quad (6.24)$$

где γ – коэффициент статизма, а $g_f = \gamma f_0$ – эквивалентное постоянное входное воздействие.

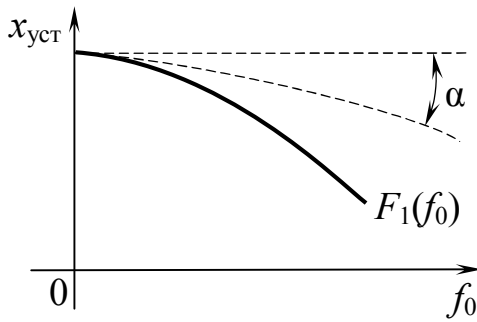


Рис. 6.14. Статическая характеристика объекта управления

Коэффициент статизма может быть определен из статической характеристики объекта управления $x_{уст} = F_1(f_0)$ (рис. 6.14), дающей связь между установившемся значением управляемой величины и постоянным возмущением f_0 . Коэффициент статизма представляет собой значение производной в точке рабочего режима (рис. 6.14):

$$\gamma = - \left. \frac{dF_1(f_0)}{df_0} \right|_{f_0=0}$$

Полученное значение эквивалентного входного воздействия g_f может быть добавлено ко входному сигналу $g(t)$.

В этом случае запретная область, построенная для системы с единичной обратной связью $m = 1$ (рис. 6.13), должна быть перестроена в соответствии с рис. 6.15, а.

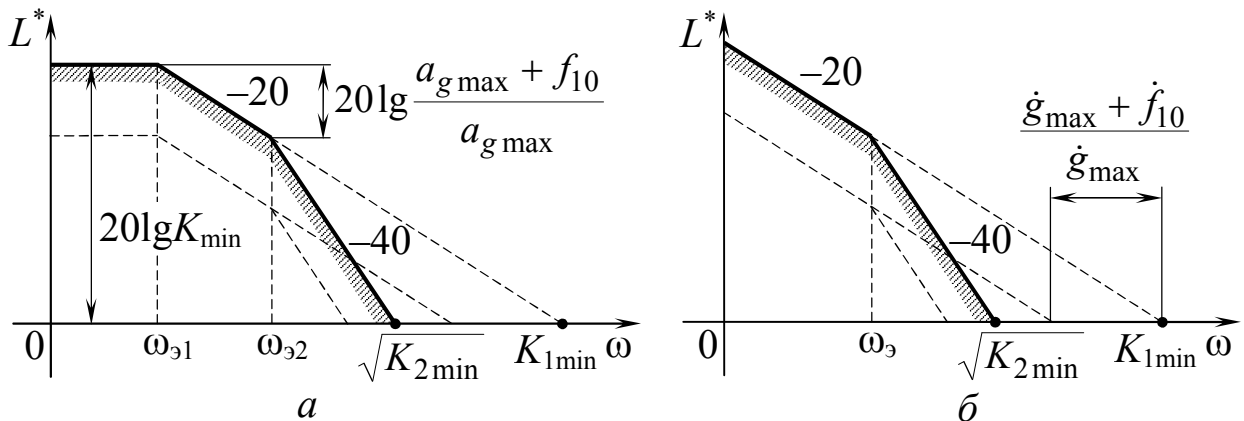


Рис. 6.15. Учет возмущающего воздействия при построении запретных областей: в статической системе (а), в системе с астатизмом первого порядка (б)

При построении запретной области на рис. 6.15, а принято, что заданы максимальные значения первой производной входного воздействия \dot{g}_{\max} и второй производной \ddot{g}_{\max} , а также максимальное значение ошибки A_e . В этом случае минимальные значения коэффициентов усиления определяются зависимостями

$$K_{\min} = \frac{a_g + f_{10}}{A_e}, \quad (6.25)$$

$$K_{1\min} = \frac{\dot{g}_{\max}}{A_e} \frac{a_g + f_{10}}{a_g}, \quad (6.26)$$

$$K_{2\min} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e} \sqrt{\frac{a_g + f_{10}}{a_g}}. \quad (6.27)$$

При введении неединичной обратной связи горизонтальная прямая, ограничивающая запретную область на рис. 6.15, *а*, может быть снижена в соответствии с рис. 6.13, *б*, но только за счет составляющей ошибки, определяемой действительным задающим воздействием $g(t) = a_g$. Составляющая ошибки, вызываемая эквивалентным входным сигналом f_{10} , не может быть снижена за счет неединичной обратной связи. В этом случае минимальное значение общего коэффициента усиления статической системы вместо (6.20) будет определяться зависимостью

$$K_{\min} = \frac{\Delta K}{K_0} \frac{a_g}{A_e} + \frac{f_{10}}{A_e}. \quad (6.28)$$

В системах с астатизмом первого порядка при условии, что возмущение $f = f_0 = \text{const}$ вызывает появление статической ошибки, формула (6.23) приводится к виду

$$e_f = \frac{\beta f_0}{K_1} = \frac{\dot{f}_{10}}{K_1}, \quad (6.29)$$

где β – коэффициент пропорциональности между возмущением и скоростью изменения управляемой величины при разомкнутой главной обратной связи, K_1 – общий коэффициент усиления системы с астатизмом первого порядка (добротность по скорости), \dot{f}_{10} – эквивалентное значение входной скорости.

Аналогично изложенному выше, величина \dot{f}_{10} может быть добавлена к скорости изменения входного сигнала. Тогда запретная область для астатических систем принимает вид, изображенный на рис. 6.15, *б*.

При задании максимальных значений \dot{g}_{\max} , \ddot{g}_{\max} и A_e формулы для минимальных коэффициентов усиления приобретают вид

$$K_{1\min} = \frac{\dot{g}_{\max} + \dot{f}_{10}}{A_e}, \quad (6.30)$$

$$K_{2\min} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{A_e} \sqrt{\frac{\dot{g}_{\max} + \dot{f}_{10}}{\dot{g}_{\max}}}. \quad (6.31)$$

В отсутствие входного сигнала $g(t)$ запретная область исчезает, но остается требование к общему коэффициенту усиления системы с астатизмом первого порядка в соответствии с формулой (6.29)

$$K_{1\min} = \frac{\beta f_0}{A_e} = \frac{\dot{f}_{10}}{A_e}, \quad (6.32)$$

которое ограничивает крайнее нижнее положение первой асимптоты ЛАЧХ проектируемой системы (асимптоты с единичным наклоном).

6.4. Формирование среднечастотной области желаемой ЛАЧХ

Желаемой называют асимптотическую ЛАЧХ $L_{\text{ж}}(\omega)$ разомкнутой системы, имеющей желаемые (требуемые) статические и динамические свойства. Желаемая ЛАЧХ (рис 6.16) состоит из трех основных асимптот: низкочастотной, среднечастотной и высокочастотной.

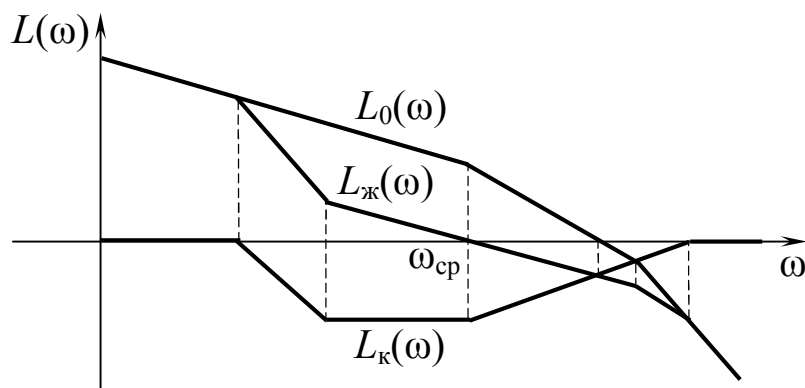


Рис. 6.16. ЛАЧХ неизменяемой части $L_0(\omega)$ и желаемая $L_{\text{ж}}(\omega)$ в случае, когда низкочастотная ЛАЧХ неизменяемой части удовлетворяет требованиям точности

Низкочастотная асимптота желаемой ЛАЧХ строится исходя из требований к точности регулирования (см. рис. 6.10).

Среднечастотная асимптота ЛАЧХ разомкнутой системы и ее сопряжение с низкочастотной определяют динамические

свойства системы – устойчивость и показатели качества переходной характеристики.

Методика В.В. Солодовникова предназначена для синтеза систем управления по требованиям к прямым показателям качества переходного процесса по каналу воспроизведения задающего воздействия.

Построение среднечастотной асимптоты желаемой ЛАЧХ начинают с выбора частоты среза $\omega_{\text{ср}}$. Для этого используется номограмма (рис. 6.17), обоснованная В.В. Солодовниковым. Она определяет зависимость перерегулирования σ и времени регулирования t_p от максимума P_{max} вещественной частотной характеристики замкнутой системы, причем время регулирования t_p дано в виде функции частоты среза $\omega_{\text{ср}}$.

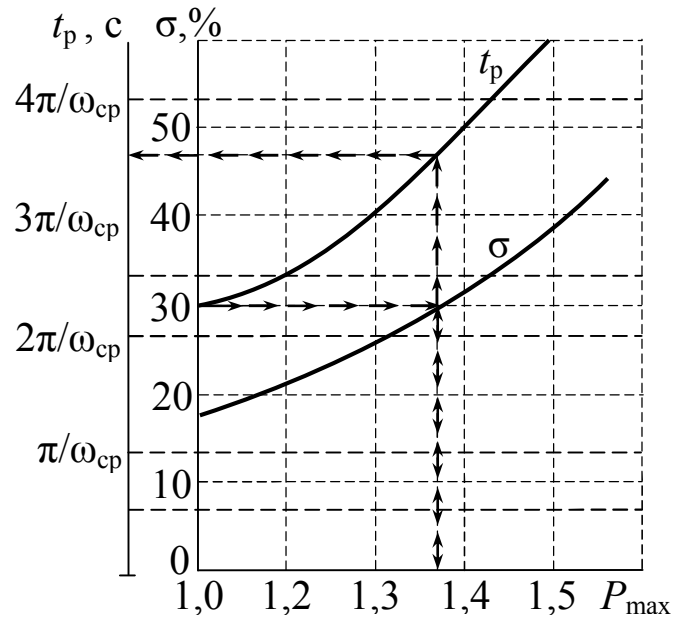


Рис. 6.17. Номограмма Солодовникова В.В.

Номограмма используется следующим образом [1]. По заданному значению перерегулирования σ определяют значение P_{max} . Затем по P_{max} определяют соотношение между t_p и $\omega_{\text{ср}}$, т. е.

$$t_p = c\pi/\omega_{\text{ср}}. \quad (6.33)$$

Предполагается, что замкнутая система имеет типовую вещественную частотную характеристику $P(\omega)$, аппроксимируемую тремя трапециями (рис. 6.18) с определенными соотношениями параметров. В частности, принимается, что $P_{\text{min}} \approx 1 - P_{\text{max}}$. При этом переходные процессы в системе имеют приемлемый вид, а их перерегулирование определяется в основном величиной P_{max} . Номограмма В. В. Солодовникова позволяет найти параметры P_{max} и $\omega_{\text{п}}$ по допустимым значениям σ и t_p . Далее по номограмме, связывающей частотные характеристики разомкнутой системы $L(\omega)$ и $\phi(\omega)$ с вещественной частотной характеристикой замкнутой сис-

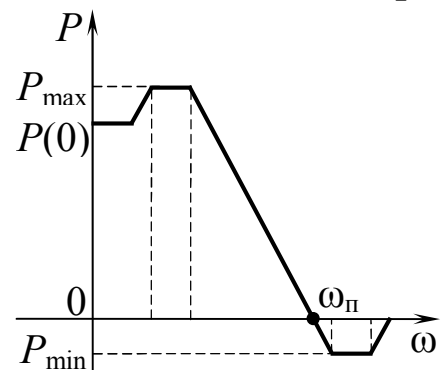


Рис. 6.18. Типовая вещественная частотная характеристика

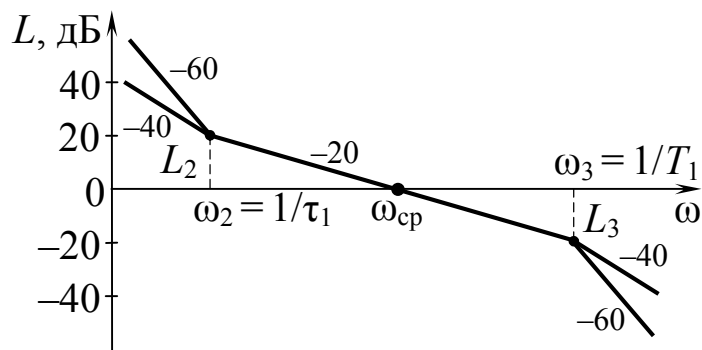


Рис. 6.19. Среднечастотные области типовых асимптотических ЛАЧХ

темы $P(\omega)$, находят параметры $L_2 = L_3$ (рис. 6.19). Частота среза $\omega_{\text{ср}}$ с частотой $\omega_{\text{п}}$ связана приближенным соотношением

$$\omega_{\text{ср}} \approx (0,6 \dots 0,9)\omega_{\text{п}}.$$

Методика А.В. Фатеева [11] отличается от методики В. В. Солодовникова тем, что не требует равенства $L_2 = L_3$.

Методика В.А. Бесекерского [10] предназначена для формирования желаемых передаточных функций следящих систем, отрабатывающих эквивалентные гармонические воздействия с заданной установившейся ошибкой. Системы с астатизмом первого порядка должны иметь требуемое усиление на частоте воздействия, откуда находится необходимая добротность по скорости. В этой методике минимизируется полоса пропускания частот контура $\omega_{\text{ср}} \rightarrow \min$ при ограничении на показатель колебательности M .

Параметры среднечастотного участка ЛАЧХ типа 2–1–2 выбираются из выражений

$$L_2 = 20 \lg \frac{M}{M-1}; \quad (6.34)$$

$$L_3 = 20 \lg \frac{M}{M+1}.$$

Методика А.А. Вавилова [11] предназначена для синтеза инвариантных до ε систем управления с высоким порядком астатизма. Предъявляются требования к переходным процессам переменной ошибки при степенных воздействиях. Выбор среднечастотных нулей и полюсов функции $W_{\text{ж}}(s)$ осуществляется по специальным номограммам синтеза по критерию минимального времени переходных процессов при заданном значении максимальной динамической ошибки.

В условиях применения программных средств для автоматизации синтеза систем управления роль приведенных выше номограмм сводится к выбору по ним начальных значений параметров. Далее в режиме оперативного взаимодействия с ЭВМ эти параметры уточняются.

В большинстве случаев первоначальный синтез последовательного корректирующего устройства приводит к достаточно сложным результатам.

В области высоких частот разомкнутый контур должен иметь малое усиление. Это способствует подавлению высокочастотных помех и обеспечивает невмешательство в область, где модель не адекватна описываемым элементам и объекту (область немоделируемой динамики). Малое усиление контура в области высоких частот приводит к тому, что характеристический полином замкнутой системы будет иметь корни, близкие к большим по модулю полюсам передаточной функции $W(s)$. Желаемая передаточная функция обычно содержит бо́льшие по модулю устойчивые полюсы исходной передаточной функции.

Типовые ЛАЧХ в области средних частот (рис. 6.19) соответствуют следующие типы желаемых передаточных функций разомкнутой системы:

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}; \quad (6.35)$$

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)^2}; \quad (6.36)$$

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)^2}{s^3(T_1 s + 1)}; \quad (6.37)$$

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)^2}{s^3(T_1 s + 1)} \quad (6.38)$$

при $T_1 < \tau_1$.

В соответствии с выражениями (6.35)-(6.38) все среднечастотные области ЛАЧХ образуются тремя отрезками прямых, имеющих наклоны:

$$-40, -20, -40 \text{ дБ/дек, } (2-1-2);$$

$-40, -20, -60$ дБ/дек, (2-1-3);

–60, –20, –40 дБ/дек, (3–1–2);

–60, –20, –60 дБ/дек, (3–1–3).

Преимущество последовательных корректирующих устройств состоит в том, что они улучшают динамические характеристики системы и лишь косвенно влияют на значение ошибки регулирования.

К числу недостатков последовательных корректирующих устройств следует отнести существенное уменьшение эффективности действия из-за непостоянства параметров составных частей элементов системы. Поэтому при их использовании к стабильности характеристик элементов системы предъявляются повышенные требования.

6.5. Вычисление передаточных функций корректирующих устройств

Коррекция автоматической системы, по существу, означает очередное усложнение алгоритма управления для обеспечения устойчивости системы и требуемого качества переходных процессов. Усложнение алгоритма сводится к более глубокой переработке поступающей информации или связано с необходимостью получения дополнительной текущей информации.

Пусть модель корректируемой системы представлена в виде одноконтурной системы с единичной отрицательной обратной связью. Передаточная функция $W_0(s)$ (рис. 6.9) описывает динамические свойства неизменяемой (силовой) части системы – собственно объекта управления с управляющим органом, исполнительного механизма, усилителей. Сюда же отнесем измерительные и преобразовательные элементы. Передаточная функция $W_y(s)$ характеризует информационно-алгоритмическую часть системы – управляющее устройство, выполняющее функции внутреннего компенсатора. Тогда $W_0(s) = W_y(s)W'_0(s)$ (рис. 6.20, а). Пусть оно рассчитано так, что удовлетворяются требования к установившимся процессам; однако переходные процессы расходятся или недопустимо колебательны.

Если для коррекции не привлекается дополнительная текущая информация, т. е. не предусматривается установка новых измерительных элементов и на объект не оказываются корректирующие воздействия по дополнительным каналам, то на структурных схемах звено коррекции может включаться последовательно с компенсатором $W_y(s)$ (рис. 6.20, а), параллельно с ним (рис. 6.20, б) или в виде обратной связи (рис. 6.20, в).

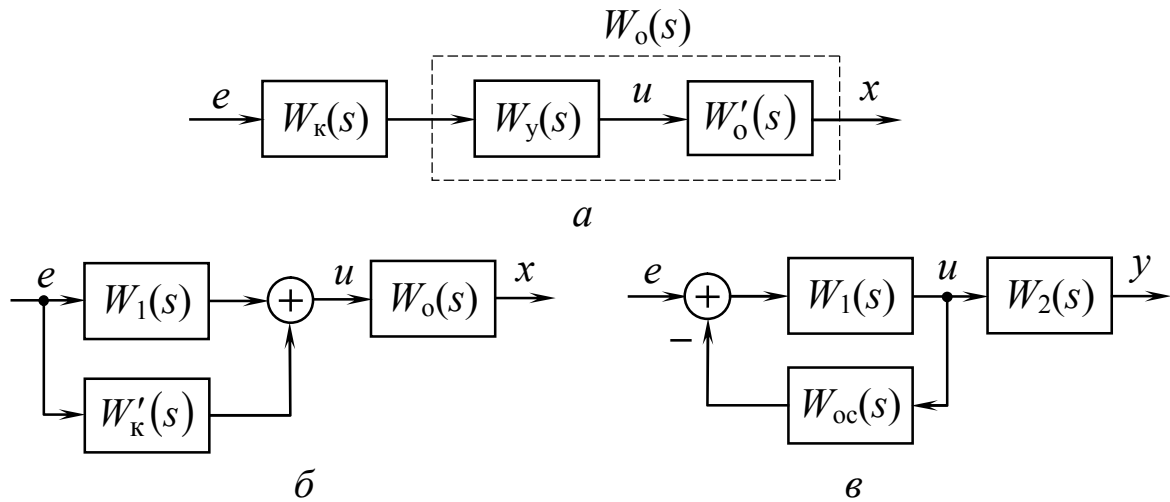


Рис. 6.20. Способы коррекции: последовательная (а), параллельная (б), корректирующая обратная связь (в)

Эти три способа в информационном и динамическом смысле равносильны и обуславливают только особенности расчета передаточной функции $W_k(s)$, а также схемной (аппаратной) или программной реализации алгоритма коррекции и управляющего устройства в целом. Легко получить формулы взаимного пересчета передаточных функций для различных способов коррекции. Проще всего получить передаточную функцию последовательной коррекции, (рис. 6.20, а) как

$$W_k(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_o(s)}, \quad (6.39)$$

где $W_{\text{ж}}(s)$ – желаемая передаточная функция разомкнутой системы.

При параллельной коррекции (рис. 6.20, б) параллельное соединение звеньев с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W'_k(s)$ следует рассматривать как некоторое эквивалентное последовательное корректирующее устройство с передаточной функцией

$$W_k(s) = W_1(s) + W'_k(s),$$

определяемой в соответствии с равенством (6.39).

Подставляя выражение (6.39) в предыдущее равенство, получаем требуемую передаточную функцию

$$W'_k(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_o(s)} - W_1(s). \quad (6.40)$$

При корректирующей обратной связи (рис. 6.20, в) рассматриваем звено $W_1(s)$, охваченное обратной связью $W_{\text{oc}}(s)$, как некоторое эквивалентное последовательное корректирующее устройство, передаточная функция которого определяется выражением (6.39),

$$W_k(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_2(s)}, \quad (6.41)$$

тогда можно записать уравнение для определения $W_{\text{oc}}(s)$

$$\frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_{\text{oc}}(s)} = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_2(s)}, \quad (6.42)$$

откуда следует

$$W_{\text{oc}}(s) = \frac{1}{W_1(s)} \left[\frac{W_o(s)}{W_{\text{ж}}(s)} - 1 \right], \quad (6.43)$$

где $W_o(s) = W_1(s)W_2(s)$ – передаточная функция исходной (некорректированной) системы (в предположении, что звено $W_1(s)$ является ее частью).

Выбор обратной связи $W_{\text{oc}}(s)$ выполняется для тех диапазонов частот, для которых справедливо неравенство

$$|W_1(j\omega)W_{\text{oc}}(j\omega)| \gg 1. \quad (6.44)$$

При этом в знаменателе левой части уравнения (6.42) можно пренебречь единицей и получить

$$W_{\text{oc}}(s) = \frac{W_2(s)}{W_{\text{ж}}(s)}. \quad (6.45)$$

Как видно из (6.45), передаточная функция корректирующей обратной связи определяется как отношение передаточной функции неохваченной обратной связью части разомкнутой системы к желаемой передаточной функции. Влияние охваченной обратной связью части $W_1(s)$ скомпенсировано достаточно сильной отрицательной обратной связью.

Иногда вместо равенства (6.45) используется эквивалентное ему соотношение

$$W_{oc}(s) = \frac{W_o(s)}{W_1(s)W_{ж}(s)}. \quad (6.46)$$

Переходя от равенств (6.45) и (6.46) к ЛАЧХ, получим

$$20\lg|W_{oc}(j\omega)| = 20\lg|W_2(j\omega)| - 20\lg|W_{ж}(j\omega)|, \quad (6.47)$$

$$20\lg|W_{oc}(j\omega)| = 20\lg|W_o(j\omega)| - 20\lg|W_1(j\omega)| - 20\lg|W_{ж}(j\omega)|. \quad (6.48)$$

Которым из двух полученных выражений, (6.47) или (6.48), пользоваться, зависит от того, какие характеристики, входящие в правую часть равенства, удобнее построить. В обоих случаях необходимо сначала получить желаемую логарифмическую характеристику $20\lg|W_{ж}(j\omega)|$. Если пользоваться выражением (6.48), то следует построить характеристики $20\lg|W_1(j\omega)|$ и $20\lg|W_o(j\omega)|$, после этого сложить характеристики $20\lg|W_1(j\omega)|$ и $20\lg|W_{ж}(j\omega)|$ и полученную характеристику вычесть из характеристики $20\lg|W_o(j\omega)|$ нескорректированной системы. Найдя характеристику $20\lg|W_{oc}(j\omega)|$, в дальнейшем поступают так же, как и при выборе последовательного корректирующего устройства. Наметив структуру обратной связи, проверяют внутренний контур в замкнутом состоянии на устойчивость. Только при условии, что этот контур устойчив, можно считать выбор обратной связи законченным.

Определение ЛАЧХ $20\lg|W_{oc}(s)|$ по выражению (6.47) аналогично только что описанному в разделе о последовательных корректирующих устройствах.

Расчет обратной связи по эквивалентному последовательному корректирующему устройству. Этот способ расчета основан на условии, что две системы с одинаковыми амплитудно-фазовыми частотными характеристиками эквивалентны по своим динамическим свойствам.

Приравнивая передаточную функцию разомкнутой системы с последовательным корректирующим устройством $W_{к}(s)W_o(s)$ (рис. 6.20, а) и передаточную функцию с корректирующей обратной связью (рис. 6.20, б), получаем

$$W_{к}(s)W_o(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_{oc}(s)},$$

где $W_o(s) = W_1(s)W_2(s)$. Отсюда следует

$$W_k(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_{oc}(s)}$$

Выбирая, как и раньше, интервал частот, для которого

$$|W_1(j\omega)W_{oc}(j\omega)| \gg 1,$$

получим выражение, на основании которого выбираем обратную связь:

$$W_{oc}(s) = \frac{1}{W_1(s)W_k(s)}, \tag{6.49}$$

Следовательно,

$$20\lg|W_{oc}(j\omega)| = -20\lg|W_k(j\omega)| - 20\lg|W_1(j\omega)|. \tag{6.50}$$

Чтобы получить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику звена обратной связи, необходимо построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $20\lg|W_1(j\omega)|$ звеньев, охваченных обратной связью, затем построить характеристику последовательного корректирующего устройства $20\lg|W_k(j\omega)|$ и сложить обе характеристики. Характеристика, обратная суммарной характеристике, будет амплитудно-частотной характеристикой обратной связи.

6.6. Примеры корректирующих устройств. Последовательные корректирующие устройства

Введение производной от ошибки – простейший метод улучшения качества переходного процесса. Структурно введение производной представлено на рис. 6.21.

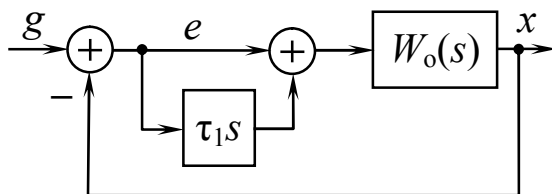


Рис. 6.21. Введение производной от ошибки

Технически это может быть осуществлено различными устройствами, причем производная может вводиться не в чистом виде, а с инерционностью, например, в виде $\frac{\tau_1 s}{T_1 s + 1}$.

Передаточная функция разомкнутой цепи (рис. 6.21) будет

$$W(s) = (\tau_1 s + 1)W_o(s).$$

Заменив $s = j\omega$, получим амплитуду и фазу в виде

$$A(\omega) = A_0(\omega)\sqrt{\tau_1^2\omega^2 + 1}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \operatorname{arctg}\tau_1\omega.$$

Существенным здесь является то, что при введении воздействия по производной добавляется положительная фаза. Вследствие этого радиус-векторы амплитудно-фазочастотной характеристики (рис. 6.22, а) поворачиваются против часовой стрелки, увеличивая запас устойчивости и улучшая качество переходного процесса. То же самое легко проследить и на логарифмических характеристиках (рис. 6.22, б).

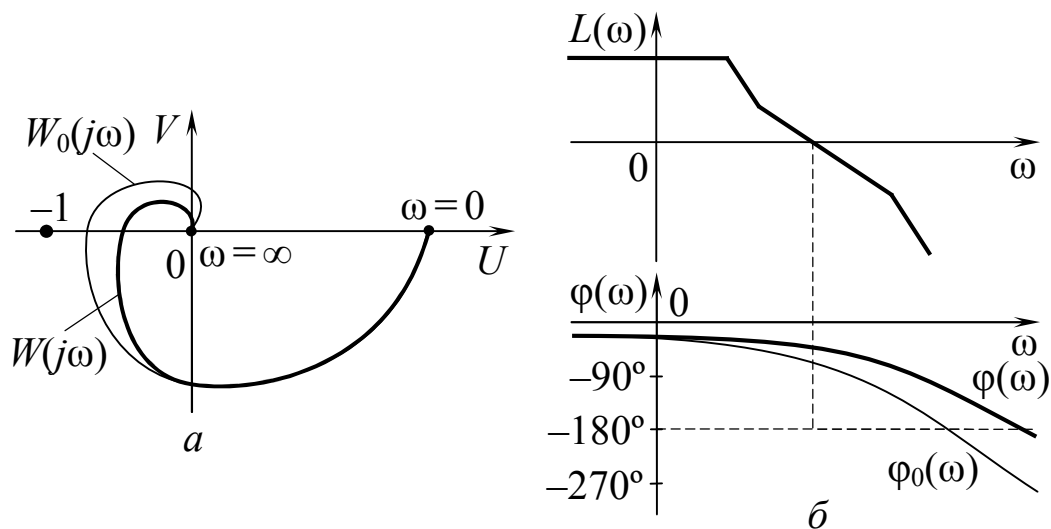


Рис. 6.22. Изменение частотных характеристик разомкнутой системы при введении производной от ошибки

В случае неидеального дифференцирования (с инерционностью) этот эффект несколько уменьшается количественно, но качественно сохраняется.

Заметим, что введение производной от ошибки может служить и стабилизирующим средством, т. е. превращать неустойчивую замкнутую систему в устойчивую. Например, если на рис. 6.22, а точка $(-1, j0)$ лежала бы внутри характеристики $W_0(j\omega)$, то новая характеристика $W(j\omega)$ уже может не охватывать точку $(-1, j0)$.

Увеличение общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи является методом повышения точности системы. Как видно из главы 3, при этом уменьшаются все виды установившихся ошибок системы. Увеличение K осуществляется последовательным введением усилительного звена в общую цепь. Но увеличение K ведет, как известно, к ухудшению условия устойчиво-

сти, а значит, и качества переходного процесса. Поэтому часто приходится это делать одновременно с введением производной.

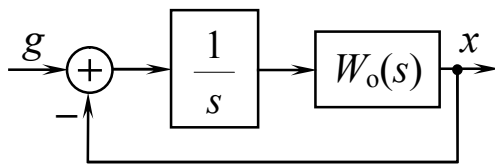


Рис. 6.23. Введение интеграла от ошибки

Ведение интеграла от ошибки является методом создания или повышения порядка астатизма системы, а значит, и увеличения ее точности (рис. 6.23). Передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(s) = \frac{1}{s} W_0(s).$$

Подставив $s = j\omega$, получим

$$A(\omega) = \frac{A_0(\omega)}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - 90^\circ.$$

Вследствие поворота фазы на -90° ухудшаются условия устойчивости и качество переходного процесса (см. рис. 6.24). Иногда это может повести и к неустойчивости замкнутой системы, если на рис. 6.24, а точка $(-1, j0)$ окажется внутри характеристики $W(j\omega)$, хотя $W_0(j\omega)$ не охватывает эту точку.

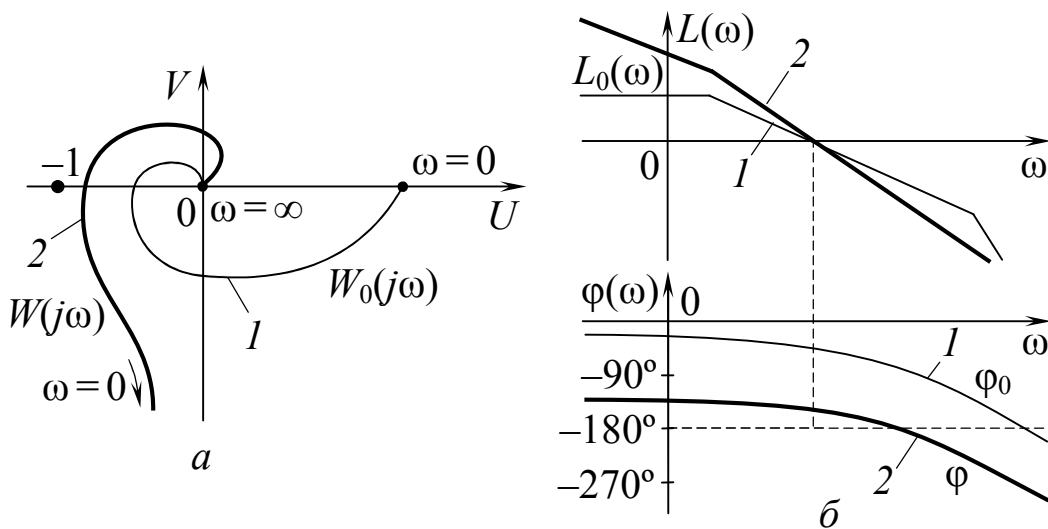


Рис. 6.24. Изменения частотных характеристик разомкнутой системы при введении интеграла от ошибки: 1 – без интеграла, 2 – с интегралом

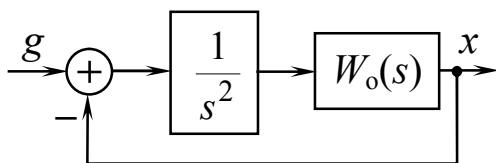


Рис. 6.25. Введение двойного интеграла от ошибки

В случае введения двойного интеграла (рис. 6.25) в систему с передаточной функцией вида

$$W_0(s) = \frac{K}{L(s)}$$

(без производной в числителе) получаем

$$W(s) = \frac{K}{s^2 L(s)}$$

и характеристическое уравнение замкнутой системы

$$\lambda^2 L(\lambda) + K = 0. \quad (6.51)$$

Эта система будет *структурно неустойчивой* (неустойчивой при любых значениях параметров), так как в характеристическом уравнении (6.51) отсутствует член с первой степенью λ . Поэтому астатизм второго порядка возможен только при условии введения «производных», т.е. наличия многочлена $N(s)$ в числителе передаточной функции. Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$\lambda^2 L(x) + KN(x) = 0.$$

Изодромное корректирующее устройство (ПИ-регулятор) имеет передаточную функцию вида

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_1 s}, \quad (6.52)$$

объединяя в себе введение интеграла и производной. Оно позволяет избежать недостатков предыдущего устройства и получать необходимый порядок астатизма системы, сохраняя ее устойчивость и качество.

Логарифмические частотные характеристики изодромного устройства имеют вид, показанный на рис. 6.26, *а*. Из них видно, что это устройство изменяет лишь низкочастотную часть амплитудно-частотной характеристики, влияющую на точность

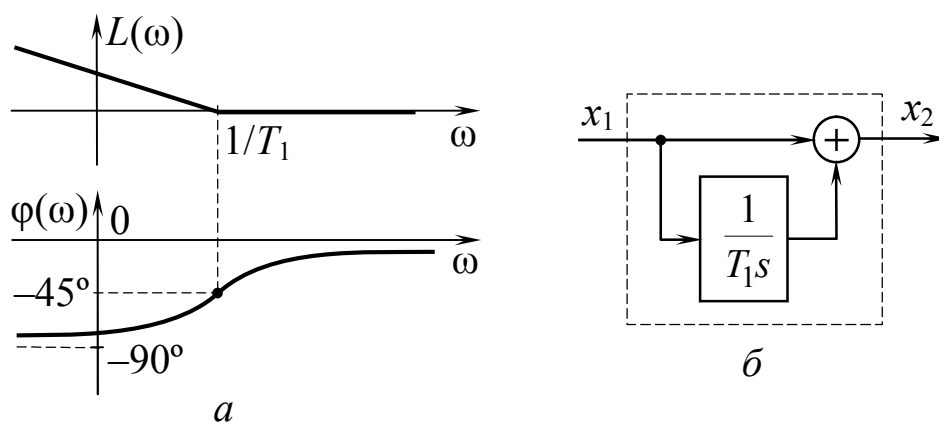


Рис. 6.26. Логарифмические частотные характеристики изодромного звена (*а*), его возможное представление (*б*)

системы (повышает ее), а отрицательный сдвиг фазы в части, существенной для условий устойчивости, невелик.

Поскольку можно записать

$$W_k(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_1 s} = 1 + \frac{1}{T_1 s}, \quad (6.53)$$

то структурно изодромное устройство можно представить, как изображено на рис. 6.26, б.

Следовательно, если в случае простого введения интеграла (рис. 6.24) регулирование в системе производится не по величине ошибки e , а только по интегралу от нее, то при изодромном устройстве мы получаем регулирование по ошибке и по интегралу (аналогично, как на рис. 6.21 регулирование по ошибке и по ее производной).

Техническое осуществление изодромного устройства может быть различным (механическое, электрическое и другие устройства) (см., например, рис. 6.27).

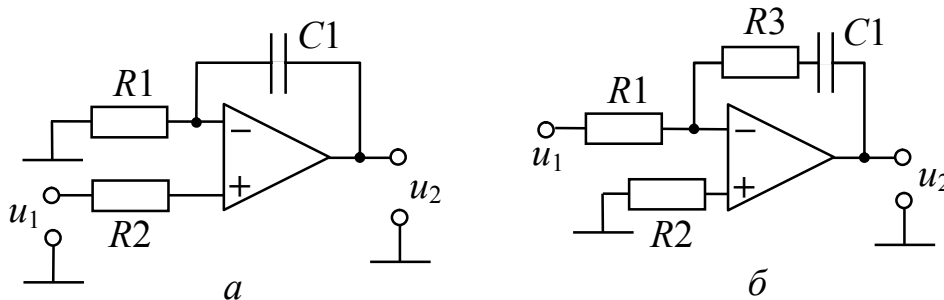


Рис. 6.27. Примеры реализации изодромного звена

Если бы в схеме на рис. 6.27, а входной сигнал подавался на левый вывод резистора $R1$, а левый вывод резистора $R2$ был заземлен ($R_2 = R_1$), то получилась бы известная схема интегратора с передаточной функцией

$$W_k(s) = -\frac{1}{R_1 C_1 s}.$$

Если входной сигнал подается на левый вывод резистора $R2$, а левый вывод резистора $R1$ заземляется, как на рис. 6.27, а, то передаточная функция звена будет положительной и на единицу больше

$$W_k(s) = 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s},$$

что при $T_1 = R_1 C_1$ совпадает с (6.53).

Для второй схемы (рис. 6.27, б) передаточную функцию найдем как взятое с отрицательным знаком отношение операторного сопротивления цепи отрицательной обратной связи

$$Z(s) = R_3 + \frac{1}{C_1 s} = \frac{R_3 C_1 s + 1}{C_1 s}$$

к сопротивлению R_1 резистора, включенного между входом звена и инвертирующим входом ОУ, т. е.

$$W_k(s) = -\frac{R_3 C_1 s + 1}{R_1 C_1 s} = -\frac{\tau_1 s + 1}{T_1 s}, \quad (6.54)$$

где $\tau_1 = R_3 C_1$, $T_1 = R_1 C_1$. Выражение (6.54) отличается от (6.53) знаком и тем, что $\tau_1 \neq T_1$. Это выражение записывается также в виде

$$W_k(s) = -K_1 \frac{\tau_1 s + 1}{s}, \quad (6.55)$$

где $K_1 = 1/T_1$ – коэффициент передачи звена.

Возможны и более сложные передаточные функции последовательных корректирующих устройств.

Корректирующие местные обратные связи

Основные виды корректирующих обратных связей следующие:

а) жесткая обратная связь

$$W_{oc}(s) = K_{oc};$$

б) инерционная жесткая обратная связь

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}}{T_{oc} s + 1};$$

в) гибкая обратная связь

$$W_{oc}(s) = K_{oc} s;$$

г) инерционная гибкая обратная связь

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc} s}{T_{oc} s + 1}.$$

Возможны и более сложные передаточные функции корректирующих обратных связей.

Проиллюстрируем на примерах основные свойства этих обратных связей при охвате ими различных типов звеньев.

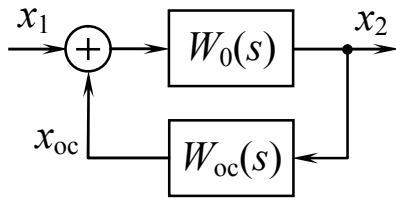


Рис. 6.28. Введение корректирующей обратной связи

Положительная жесткая обратная связь. Пусть она охватывает апериодическое звено (рис. 6.28), т. е.

$$W_0(s) = \frac{K_0 s}{T_0 s + 1}, \quad W_{oc}(s) = K_{oc}.$$

Тогда общая передаточная функция будет

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 - W_{oc}(s)W_0(s)} = \frac{K_0}{T_0 s + 1 - K_0 K_{oc}}$$

или

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1},$$

где

$$K_1 = \frac{K_0}{1 - K_0 K_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T_0}{1 - K_0 K_{oc}}. \quad (6.56)$$

Следовательно, положительная обратная связь может служить для увеличения коэффициента усиления. Но надо иметь в виду, что одновременно с этим увеличивается и постоянная времени T_1 , т. е. инерционность звена, а при $K_{oc} > 1/K_0$ звено становится неустойчивым.

Отрицательная жесткая обратная связь. При охвате ею апериодического звена получаем

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_{oc}(s)W_0(s)} = \frac{K_0}{T_0 s + 1 + K_0 K_{oc}} = \frac{K_1}{T_1 s + 1}, \quad (6.57)$$

где

$$K_1 = \frac{K_0}{1 + K_0 K_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T_0}{1 + K_0 K_{oc}}.$$

Следовательно, отрицательная жесткая обратная связь уменьшает инерционность звена. Тем самым она улучшает качество переходного процесса в системе и может оказывать стабилизирующее действие, т. е. превращать неустойчивую замкнутую систему в устойчивую (подобно введению производной). Уменьшение же коэффициента усиления K_1 при этом может быть компенсировано за счет других звеньев системы.

При охвате *интегрирующего звена* отрицательной жесткой обратной связью, т. е. при

$$W_0(s) = \frac{K_{oc}}{s}, \quad W_{oc}(s) = K_{oc},$$

получаем

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_{oc}(s)W_0(s)} = \frac{K_0}{s + K_0K_{oc}} = \frac{K_1}{T_1s + 1}, \quad (6.58)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{K_{oc}}, \quad T_1 = \frac{1}{K_0K_{oc}}.$$

Видно, что под действием жесткой обратной связи теряется интегрирующее свойство звена, и оно *превращается в аperiodическое с коэффициентом усиления, который целиком определяется только обратной связью*. Постоянная времени T_1 будет мала при большом коэффициенте усиления звена K_0 .

Указанный способ введения обратной связи применяется на практике, например, в электроприводах, чтобы сделать угол поворота выходного вала пропорциональным управляющему сигналу (напряжению).

Далее без специальных оговорок будем рассматривать только отрицательные обратные связи.

Инерционная жесткая обратная связь. При охвате ею интегрирующего звена, когда

$$W_0(s) = \frac{K_0}{s}, \quad W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}}{T_{oc}s + 1},$$

приходим к следующему выражению:

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_{oc}(s)W_0(s)} = \frac{K_0(T_{oc}s + 1)}{T_{oc}s^2 + s + K_0K_{oc}} = \frac{K_1(T_{oc}s + 1)}{T_1^2s^2 + T_2s + 1}, \quad (6.59)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{K_{oc}}; \quad T_1^2 = \frac{T_{oc}}{K_0K_{oc}}; \quad T_2 = \frac{1}{K_0K_{oc}}.$$

Следовательно, в данном случае интегрирующее звено превращается в звено второго порядка с введением производной. При этом коэффициент усиления K_1 и интенсивность введения производной T_{oc} целиком определяются обратной связью, а коэффициент усиления звена K_0 влияет на новые постоянные времени T_1 и T_2 , которые будут тем меньше, чем больше K_0 . Поэтому *при большом K_0 охват интегрирующего звена инерционной жесткой обратной связью эквивалентен усилительному звену с*

введением производной. Отсюда вытекает и хорошее ее влияние инерционной обратной связи на качество переходного процесса в системе в целом.

Гибкая обратная связь. При охвате ею колебательного звена, т. е.

$$W_0(s) = \frac{K_0}{T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1}, \quad W_{oc}(s) = K_{oc} s,$$

имеем

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{W_0(s)}{1 + W_{oc}(s)W_0(s)} = \\ &= \frac{K_0}{(T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1) \left(1 + \frac{K_{oc} K_0 s}{T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1} \right)} = \\ &= \frac{K_0}{T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1 + K_{oc} K_0 s} = \frac{K_0}{T_0^2 s^2 + 2\zeta_1 T_0 s + 1}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

где из равенства

$$2\zeta T_0 + K_{oc} K_0 = 2\zeta_1 T_0,$$

получаем новое значение коэффициента затухания колебательного звена

$$\zeta_1 = \zeta + \frac{K_{oc} K_0}{2T_0}. \quad (6.61)$$

Как видно из равенств (6.60) и (6.61) при охвате колебательного звена гибкой обратной связью постоянная времени T_0 не меняется, а коэффициент демпфирования ζ_1 увеличивается. Процесс становится менее колебательным и может превратиться в апериодический (если $\zeta_1 \gg 1$).

На практике такой способ используется для улучшения переходных процессов в LC -фильтре, прямое увеличение коэффициента ζ в котором связано с уменьшением КПД. Охват LC -фильтра гибкой отрицательной обратной связью позволяет улучшить процессы без снижения КПД. Однако техническая реализация такого способа требует наличия усилителя мощности на входе LC -фильтра, когда обратная связь, реализованная на слаботочных компонентах, замыкается с выхода LC -фильтра на вход усилителя мощности.

Заметим, что при охвате апериодического звена с передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{K_0}{T_0s + 1}$$

гибкой обратной связью $K_{oc}s$ получается новое апериодическое звено:

$$W(s) = \frac{K_0}{(T_0s + 1) \left(1 + \frac{K_{oc}K_0s}{T_0s + 1} \right)} = \frac{K_0}{T_0s + 1 + K_{oc}K_0s} = \frac{K_0}{T_1s + 1},$$

где $T_1 = T_0 + K_{oc}K_0$. Следовательно, охватывать апериодическое звено отдельно гибкой обратной связью нет смысла, так как это только увеличит его инерционность (постоянную времени).

При охвате инерционного интегрирующего звена гибкой обратной связью, т. е. при

$$W_0(s) = \frac{K_0}{s(T_0s + 1)}, \quad W_{oc}(s) = K_{oc}s,$$

имеем

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_{oc}(s)W_0(s)} = \frac{K_0}{s(T_0s + K_{oc}K_0 + 1)} = \frac{K_1}{s(T_1s + 1)}, \quad (6.62)$$

где

$$T_1 = \frac{T}{1 + K_0K_{oc}}, \quad K_1 = \frac{K_0}{1 + K_0K_{oc}},$$

т. е. сохраняется тот же тип интегрирующего звена, но с уменьшенной инерционностью.

Инерционная гибкая обратная связь. При охвате ею инерционного интегрирующего звена, т. е. при

$$W_0(s) = \frac{K_0}{s(T_0s + 1)}, \quad W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}s}{T_{oc}s + 1},$$

$$\begin{aligned}
W(s) &= \frac{K_0}{s(T_0s + 1) \left[1 + \frac{K_0 K_{oc} s}{s(T_0s + 1)(T_{oc}s + 1)} \right]} = \\
&= \frac{K_0(T_{oc}s + 1)}{s(T_0s + 1)(T_{oc}s + 1) + K_0 K_{oc} s} = \\
&= \frac{K_0(T_{oc}s + 1)}{s \left[T_0 T_{oc} s^2 + (T_0 + T_{oc})s + 1 + K_0 K_{oc} \right]} = \frac{K_1(T_{oc}s + 1)}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)},
\end{aligned} \tag{6.63}$$

где

$$K_1 = \frac{K_{oc}}{1 + K_0 K_{oc}}; \quad T_1^2 = \frac{T_0 T_{oc}}{1 + K_0 K_{oc}}; \quad T_2 = \frac{T_0 + T_{oc}}{1 + K_0 K_{oc}}.$$

Здесь для сохранения интегрирующего свойства звена получается эффект введения производной, т. е. интегрирующее звено становится изодромным, а новые постоянные времени T_1 и T_2 , характеризующие инерционность звена, могут быть сделаны малыми за счет большого первичного коэффициента усиления K_0 . В последнем случае имеем

$$K_1 \approx \frac{1}{K_{oc}}.$$

Можно заметить вообще, что инерционное запаздывание в обратной связи (в отличие от такового в прямой цепи) целесообразно использовать для улучшения качества переходных процессов, получая эффект, аналогичный введению производной в прямой цепи.

Могут применяться и другие типы корректирующих обратных связей с более сложными передаточными функциями. Рассмотрим как обеспечить условие сохранения порядка астатизма охватываемого звена. Пусть звено

$$W_0(s) = \frac{K_0}{s^\nu} W'_0(s)$$

охватывается гибкой обратной связью

$$W_{oc}(s) = k_{oc} s^\mu W'_{oc}(s).$$

Тогда

$$W(s) = \frac{K_0 W'_0(s)}{s^\nu + K_0 K_{oc} s^\mu W'_0(s) W'_{oc}(s)}. \tag{6.64}$$

Очевидно, что для сохранения ν -го порядка астатизма необходимо в обратной связи иметь $\mu \geq \nu$. Если же это невозможно технически и получается $\mu < \nu$, то потерянную часть астатизма можно компенсировать добавлением последовательных корректирующих устройств, например, изодромного типа.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. Каковы основные задачи, решаемые при синтезе систем автоматического управления?
2. Что такое ковариантность с задающим воздействием и инвариантность к возмущающим воздействиям?
3. Как осуществляется параллельная компенсация возмущения? Каково при этом условие полной инвариантности?
4. Как вводится корректирующее устройство по задающему воздействию? Каково при этом условие ковариантности?
5. Каково условие обеспечения требуемой точности воспроизведения гармонического задающего воздействия?
6. Как строится запретная область ЛАЧХ по условиям точности воспроизведения гармонического задающего воздействия?
7. Как может быть расположена низкочастотная часть желаемой ЛАЧХ относительно запретной области по точности?
8. Как строятся запретные области ЛАЧХ по условиям точности для статических систем?
9. Как при построении запретных областей ЛАЧХ по условиям точности учитывается дополнительная ошибка, вносимая возмущением?
10. Как формируется среднечастотная область желаемой ЛАЧХ?
11. Как вычисляется передаточная функция корректирующего устройства при последовательной коррекции?
12. Как вычисляется передаточная функция корректирующей обратной связи?
13. Каковы наиболее простые виды последовательных корректирующих устройств?
14. Что такое ПИ-регулятор и как он влияет на характеристики систем?
15. Каковы наиболее простые виды корректирующих обратных связей?
16. Чем отличаются жесткая и гибкая корректирующие обратные связи?
17. В чем заключается отличие влияния инерционного запаздывания в обратной связи и в прямой цепи?

ГЛАВА 7. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Выбор параметров САУ по требуемой точности

Пример 7.1. Определить требуемое значение коэффициента усиления разомкнутой системы K для системы стабилизации скорости вращения Ω электродвигателя постоянного тока (электропривода постоянного тока) (рис. 7.1, а). Допустимая ошибка регулирования скорости вращения

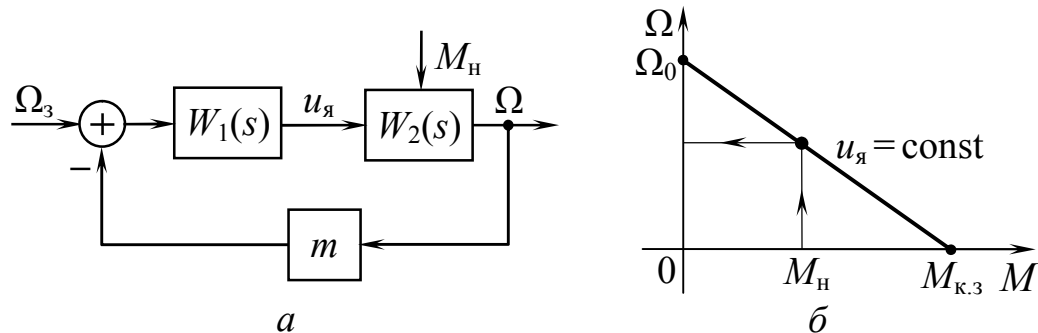


Рис. 7.1. Структурная модель системы стабилизации скорости вращения (а), механическая характеристика электродвигателя постоянного тока при постоянном напряжении на якоре $u_{я}$ (б)

ния при моменте нагрузки по валу двигателя $M_{н} = 0,2M_{к.з}$ ($M_{к.з}$ – момент короткого замыкания, развиваемый двигателем) (рис. 7.1, б) не должна превышать 0,1 % от скорости холостого хода Ω_0 .

Решение. При единичной главной обратной связи ($m = 1$) согласно равенству (3.26) изображение по Лапласу ошибки регулирования $e(t) = \Delta\Omega$ состоит из двух слагаемых

$$\Delta\Omega(s) = \frac{1}{1+W(s)}\Omega_3(s) - \frac{W_M(s)}{1+W(s)}M_H(s), \quad (7.1)$$

где Ω_3 – заданная скорость вращения привода, $W(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы, $W_M(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы по моменту нагрузки на валу электродвигателя.

Первое слагаемое в равенстве (7.1) соответствует ошибке воспроизведения задающего воздействия $\Omega_3(t)$, второе слагаемое определяет составляющую ошибки, вызванную действием момента нагрузки M_H .

Передаточная функция разомкнутой системы $W(s)$ определяется как произведение передаточных функций усилителя мощности $W_1(s)$, в качестве которого в настоящее время используются управляемые выпрямители и импульсные преобразователи постоянного напряжения, и электродвигателя $W_2(s)$. В качестве датчика скорости вращения, выходной сигнал которого поступает на суммирующее звено, используется, например, тахогенератор, инерционность которого в данной задаче не учитывается. Отметим, что, строго говоря, управляемые выпрямители и им-

пульсные преобразователи постоянного напряжения представляют собой дискретные устройства, поскольку содержат устройства импульсно-фазового управления и широтно-импульсные модуляторы. Их представление передаточными функциями соответствует использованию усредненных динамических моделей этих устройств, когда дискретность не учитывается.

Таким образом, при единичной главной обратной связи имеем

$$W(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad (7.2)$$

где T_1 и T_2 – постоянная времени усилителя мощности и электромеханическая постоянная времени электродвигателя.

Передаточная функция разомкнутой системы по моменту нагрузки определяется выражением

$$W_M(s) = \frac{\Omega_0 / M_{к.з}}{1 + T_2 s}, \quad (7.3)$$

где Ω_0 – скорость холостого хода электродвигателя, $M_{к.з}$ – момент короткого замыкания.

Выражение (7.1) с учетом (7.2) и (7.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\Omega(s) = & \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K} \Omega_3(s) - \\ & - \frac{(\Omega_0 / M_{к.з})(T_1 s + 1)}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K} M_H(s). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Обычно настройка системы осуществляется таким образом, чтобы ошибка регулирования была наименьшей. Этому условию соответствует такая настройка, при которой в статической системе устраняется статическая ошибка от закона регулирования. Для этого коэффициент передачи главной обратной связи должен отличаться от единицы и согласно условию (6.19) быть равным $m = (K - 1)/K$.

Ошибку регулирования при моменте нагрузки $M_H = \text{const}$ найдем как

$$\Delta\Omega_{M_H} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\Omega_0 / M_{к.з})(T_1 s + 1)}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K} \frac{M_H}{s} = \frac{\Omega_0 M_H / M_{к.з}}{1 + K},$$

откуда можно найти требуемый коэффициент усиления K при заданной допустимой ошибке $\Delta\Omega_{M_H} / \Omega_0$

$$K = \frac{\Omega_0 M_H}{\Delta\Omega_{M_H} M_{к.з}} - 1. \quad (7.5)$$

При заданных значениях $\Delta\Omega_{M_H} / \Omega_0 = 0,001$, $M_H / M_{к.з} = 0,2$ по формуле (7.5) найдем

$$K = \frac{0,2}{0,001} - 1 = 199.$$

Пример 7.2. Определить контрольную точку для низкочастотной части ЛАЧХ разомкнутой следящей системы из условия, чтобы ошибка слежения не превышала $\vartheta_{\max} \leq 1,5'$ при изменении входного воздействия по гармоническому закону

$$\vartheta_1 = \theta_{1\max} \sin \omega_k t,$$

где $\theta_{1\max} = 25^\circ$, $\omega_k = 2\pi/T = 6,28 \text{ с}^{-1}$. Структурная схема следящей системы показана на рис. 7.2, а.

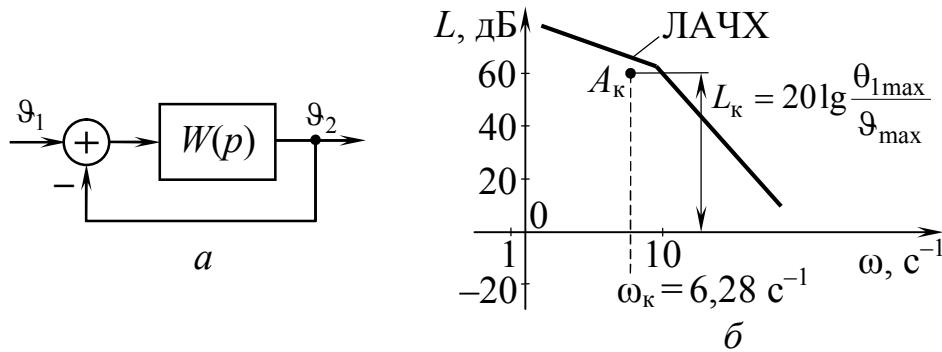


Рис. 7.2. Структурная схема следящей системы (а); построение контрольной точки A_k (б)

Решение. Ошибка слежения, вызванная изменением входного воздействия, равна

$$\vartheta_{\max} = \frac{1}{|1 + W(j\omega)|} \theta_{1\max} \quad \text{при} \quad \omega = \omega_k,$$

где $W(j\omega)$ – частотная передаточная функция разомкнутой системы. Так как обычно в современных следящих системах $|W(j\omega_k)| \gg 1$, то можно воспользоваться приближенной зависимостью

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{\theta_{1\max}}{|W(j\omega_k)|}. \quad (7.6)$$

Решая выражение (7.6) относительно $|W(j\omega_k)|$, получим требуемое значение модуля частотной передаточной функции

$$|W(j\omega_k)| = \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}},$$

или

$$L_k = 20 \lg |W(j\omega_k)| = 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (7.7)$$

По формуле (7.7) в логарифмической системе координат (рис. 7.2, б) построена так называемая контрольная точка A_k :

$$\omega_k = 6,28 \text{ с}^{-1}, \quad 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = 20 \lg \frac{25 \cdot 60}{1,5} = 60 \text{ дБ}.$$

Требуемая точность слежения будет достигнута, если ЛАЧХ системы будет лежать выше точки A_k , в пределе пересекая ее (рис. 7.2, б).

Пример 7.3. Определить запретную область для ЛАЧХ разомкнутой следящей системы из условия, чтобы ошибка слежения не превышала $\vartheta_{\max} \leq 1,0'$ при изменении входного воздействия с максимальной скоростью $\Omega = 40$ град/с и максимальным ускорением $\varepsilon = 60$ град/с².

Решение. В тех случаях, когда закон изменения входного задающего воздействия неизвестен, расчет можно вести на эквивалентное синусоидальное воздействие. Параметры эквивалентного режима определяются по формулам (3.33), в которые необходимо поставить $\dot{g}_{\max} = \Omega$, $\ddot{g}_{\max} = \varepsilon$, $a_{\vartheta} = \theta_{1\max}$. Тогда

$$\omega_{\vartheta} = \omega_{\kappa} = \frac{\varepsilon}{\Omega} = \frac{60}{40} = 1,5 \text{ с}^{-1}, \quad \theta_{1\max} = \frac{\Omega}{\omega_{\kappa}} = \frac{\varepsilon}{\omega_{\kappa}^2} = \frac{40}{1,5} = 26,66^{\circ}.$$

Здесь ω_{κ} – угловая частота эквивалентного синусоидального воздействия, $\theta_{1\max}$ – амплитуда эквивалентного синусоидального воздействия.

Координаты контрольной точки A_{κ} (см. предыдущую задачу) равны (рис. 7.3)

$$\omega_{\kappa} = \frac{\varepsilon}{\Omega} = 1,5 \text{ с}^{-1}, \quad L_{\kappa} = 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = 20 \lg \frac{\Omega^2}{\varepsilon \vartheta_{\max}} = 20 \lg 1600 \approx 63 \text{ дБ}.$$

Для построения всей запретной области аналогично рис. 6.20 найдем геометрическое место контрольных точек, соответствующих двум случаям: 1) когда Ω максимально, а ε убывает до нуля, 2) когда ε максимально, а Ω убывает до нуля. В первом случае геометрическим местом точек будет являться прямая, проходящая с наклоном 20 дБ/дек, во втором случае – прямая с наклоном –40 дБ/дек через точку A_{κ} (см. рис. 7.3). Для обеспечения требуемой точности слежения ЛАЧХ разомкнутой следящей системы не должна заходить в запретную зону, ограниченную этими прямыми.

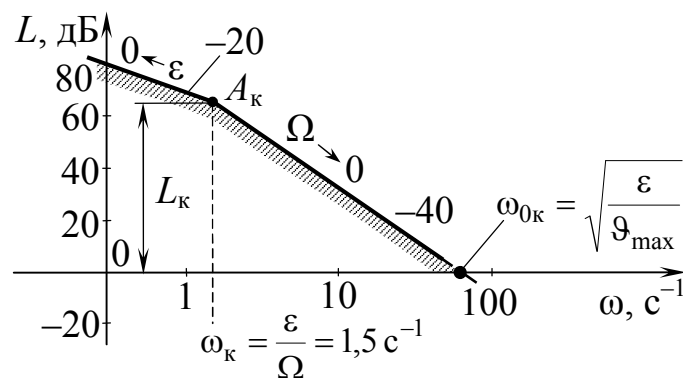


Рис 7.3. Построение запретной области

Пример 7.4. Для следящей системы, структурная схема которой показана на рис. 7.2, а, построить низкочастотную часть желаемой ЛАЧХ и определит требуемое значение общего коэффициента усиления из условия обеспечения необходимой точности слежения. Система обладает ас-

татизмом первого порядка. Требования, предъявляемые к точности слежения, те же, что и в примере 7.3.

Решение. Для обеспечения задачи демпфирования системы ЛАЧХ должна располагаться как можно левее. Предельно допустимое смещение ЛАЧХ влево ограничивается запретной областью по точности. С этой точки зрения целесообразно, чтобы низкочастотный участок желаемой ЛАЧХ, имеющий наклон -40 дБ/дек проходил как можно ближе к линии запретной зоны (рис. 7.4), т. е. чтобы $\omega_0 = \omega_{0к}$ и $T_1 = 1/\omega_k$.

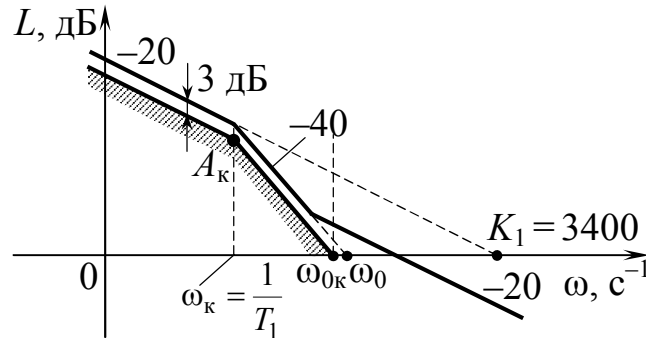


Рис. 7.4. Построение низкочастотной части желаемой ЛАЧХ

Однако первая асимптота ЛАЧХ, имеющая наклон -20 дБ/дек должна проходить выше границы запретной области 3 дБ (см. рис. 7.4). Если эту асимптоту продлить до пересечения с нулевой осью, то точка пересечения даст значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы (добротности по скорости K_1).

Согласно рис. 7.4 имеем

$$K_1 = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = 1,41 \frac{40 \cdot 60}{1} = 3400 \text{ с}^{-1}.$$

Базовая частота

$$\omega_0 = \sqrt{1,41 \frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}} = 1,19 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}} = 1,19 \sqrt{60 \cdot 60} = 71,3 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 7.5. Определить требуемое значение общего коэффициента усиления разомкнутой следящей системы с астатизмом второго порядка из условия, чтобы ошибка слежения не превышала $\vartheta_{\max} \leq 1,5'$ при изменении задающего воздействия по гармоническому закону

$$\vartheta_1 = \theta_{1\max} \sin \omega_k t,$$

где $\theta_{1\max} = 25^\circ$, $\omega_k = 6,28 \text{ с}^{-1}$.

Решение. По формуле (3.32) амплитуда установившейся ошибки астатической системы при $A_e = \vartheta_{\max}$, $a_g = \theta_{1\max}$, $\omega = \omega_k$ равна

$$\vartheta_{\max} \cong \frac{\omega_k^v}{K} \theta_{1\max},$$

где $v = 2$ – порядок (степень) астатизма. Отсюда требуемый коэффициент усиления (добротность по ускорению)

$$K_\varepsilon = K = \sqrt{2} \frac{\omega_k^2}{\vartheta_{\max}} \theta_{1\max} = \sqrt{2} \frac{6,28^2}{0,025} 25 = 55774 \text{ с}^{-1},$$

где учтено, что $1,5' = 0,025^\circ$.

Пример 7.6. Для следящей системы, обладающим астатизмом первого порядка, определить параметры низкочастотной части желаемой ЛАЧХ из условия обеспечения требуемой точности слежения без учета и с учетом момента нагрузки. Максимальная скорость слежения $\Omega = 24$ град/с, максимальное ускорение $\varepsilon = 20$ град/с², допустимая ошибка $\vartheta_{\max} = 0,1^\circ$. Момент нагрузки, приведенный к валу двигателя, $M_H = 19,6 \cdot 10^{-5}$ Н·м. Жесткость механической характеристики $\beta = \Omega_0 / M_{к.з}$ (где $\Omega_0 = 5000$ об/мин – скорость холостого хода, $M_{к.з} = 9,81 \cdot 10^{-4}$ Н·м – пусковой момент двигателя). Передаточное отношение редуктора $i = 1000$.

Решение. 1. Момент нагрузки (возмущение) отсутствует. Тогда параметры эквивалентного гармонического воздействия определяются по формуле (3.33) при подстановке $\dot{g}_{\max} = \Omega$, $\ddot{g}_{\max} = \varepsilon$, $a_\vartheta = \theta_{1\max}$:

$$\omega_\vartheta = \omega_k = \frac{\varepsilon}{\Omega} = \frac{20}{24} = 0,8333 \text{ с}^{-1},$$

$$\theta_{1\max} = \frac{\Omega^2}{\varepsilon} = \frac{\Omega}{\omega_k} = \frac{24^2}{20} = 28,8^\circ.$$

Параметры конкретной точки запретной области ЛАЧХ определяется аналогично (6.11):

$$\omega_k = 0,8333 \text{ с}^{-1}, \quad L_k = 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = 20 \lg \frac{28,8}{0,1} = 49,19 \text{ дБ}.$$

Низкочастотную ЛАЧХ проводим через точку, расположенную на 3дБ выше контрольной (рис. 7.5). Участок асимптотической ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек соответствует АЧХ

$$|W(j\omega)| = \frac{K_\Omega}{\omega}, \quad (7.8)$$

где K_Ω – коэффициент усиления, называемый также добротностью по скорости, определяемый из условия

$$|W(j\omega_k)| = \frac{K_\Omega}{\omega_k} = \sqrt{2} \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}},$$

отсюда

$$K_\Omega = \sqrt{2} \omega_k \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}}; \quad (7.9)$$

$$K_{\Omega} = \sqrt{2} \frac{24}{0,1} = 339,4 \text{ с}^{-1}.$$

Частота, на которой участок асимптотической ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек, продолженной до пересечения с осью частот, пересекает эту ось, согласно (7.8) равна K_{Ω} . Участок асимптотической низкочастотной ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек соответствует АЧХ

$$|W(j\omega)| = \frac{K_{\varepsilon}}{\omega^2}, \quad (7.10)$$

где K_{ε} – коэффициент усиления, называемый также добротностью по ускорению, определяемой из условия

$$|W(j\omega_k)| = \frac{K_{\varepsilon}}{\omega_k^2} = \sqrt{2} \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}},$$

откуда

$$K_{\varepsilon} = \sqrt{2} \omega_k^2 \frac{\theta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}; \quad (7.11)$$

$$K_{\varepsilon} = \sqrt{2} \frac{20}{0,1} = 282,8 \text{ с}^{-2}.$$

Частота, на которой участок асимптотической ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек, продолженный до пересечения с осью частот, пересекает эту ось, согласно (7.10) определяется как $\sqrt{K_{\varepsilon}}$.

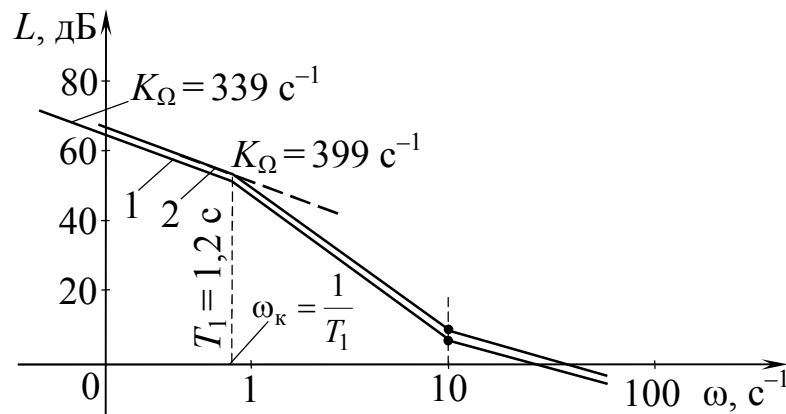


Рис. 7.5. Низкочастотные ветви желаемой ЛАЧХ:

1 – без учета момента нагрузки, 2 – с учетом момента нагрузки;

T_1 – наименьшая постоянная времени системы

2. Двигатель нагружен моментом $M_H = 19,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Демпфирование системы осуществляется введением обратной связи, охватывающих двигатель, или производных от угла рассогласования. Тогда воспользуемся формулами (6.23), (6.29)-(6.31), в которые необходимо подставить $\dot{g}_{\max} = \Omega$, $\ddot{g}_{\max} = \varepsilon$, $A_e = \vartheta_{1\max}$, $f_0 = M_H$. Передаточная функция разомкнутой системы по моменту нагрузки

$$W_{M_H}(s) = -\frac{\beta}{s(1+T_M s)}, \quad (7.12)$$

где T_M – электромеханическая постоянная времени электродвигателя.

Появление множителя « s » в правой части (7.12) связано с тем, что выходной величиной двигателя принимается угол поворота вала, а не скорость вращения Ω . Передаточная функция замкнутой системы для возмущения

$$\Phi_{M_H}(s) = -\frac{W_{M_H}(s)}{1+W(s)}, \quad (7.13)$$

где передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{K_\Omega N(s)}{sL_1(s)}, \quad (7.14)$$

$N(s)$ и $L_1(s)$ – многочлены с единичными коэффициентами при младших членах, Из (7.13) с учетом (7.12) и (7.14) найдем

$$\Phi_{M_H}(s) = -\frac{\beta}{1+T_M s} \frac{L_1(s)}{sL_1(s) + K_\Omega N(s)}. \quad (7.15)$$

Тогда найдем статическую ошибку, вызванную возмущением $M_H = \text{const}$

$$e_{\text{ст}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta}{1+T_M s} \frac{L_1(s)}{sL_1(s) + K_\Omega N(s)} \frac{M_H}{s} = \frac{\beta M_H}{K_\Omega},$$

что соответствует формуле (6.29), где $f'_{10} = \beta M_H$. По формуле (6.30) найдем

$$K_{\Omega \min} = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} + \frac{\beta M_H}{\vartheta_{\max} i} = 339,4 + \frac{5994}{0,1 \cdot 1000} = 399,3 \text{ с}^{-1}. \quad (7.16)$$

Отметим, что передаточное отношение редуктора, установленного между валами электродвигателя и управляемого объекта, входит в знаменатель выражения общего коэффициента усиления разомкнутой системы K_Ω . Величина $\vartheta_{\max} i$ представляет собой ошибку, приведенную к валу электродвигателя.

Произведение βM_H , определяемое как

$$\beta M_H = \frac{\Omega_0}{M_{\text{к.з}}} M_H = \frac{5000 \cdot 19,6 \cdot 10^{-5}}{9,81 \cdot 10^{-4}} = 999 \text{ об/мин},$$

получается в оборотах в минуту. Переведем это значение в градусы в секунду, поскольку ошибка ϑ_{\max} , входящая в (7.16), задана в градусах. Тогда

$$\beta M_H = \frac{999 \cdot 360}{60} = 5994 \text{ град/с}.$$

Пример 7.7. Для системы регулирования построить низкочастотную часть желаемой ЛАЧХ, если известно, что при изменении входного задающего воздействия по закону $\vartheta_1 = \theta_{1\max} \sin \omega_k t$, где $\theta_{1\max} = 30^\circ$, $\omega_k = 2\pi/T_k = 12,56 \text{ с}^{-1}$, допустимая ошибка слежения не должна превышать по фазе $\Delta\varphi = 1^\circ$, по амплитуде $\Delta\vartheta/\theta_{1\max} \leq 1^\circ$. Система обладает астатизмом первого порядка. В области низких частот передаточная функция разомкнутой системы аппроксимируется выражением

$$W(s) = \frac{K_\Omega}{s(1 + T_1 s)}.$$

Решение. На рис. 7.6, а показана векторная диаграмма ошибок, где $|\vartheta_1| = \theta_{1\max}$. Ошибка слежения

$$\vartheta(j\omega_k) = \frac{\vartheta_1(j\omega_k)}{1 + W(j\omega_k)} = \frac{T_1(j\omega_k)^2 + j\omega_k}{T_1(j\omega_k)^2 + j\omega_k + K_\Omega} \vartheta_1(j\omega_k) = \vartheta_A(j\omega_k) + j\vartheta_\varphi(\omega_k),$$

где ϑ_A – синфазная составляющая ошибки, ϑ_φ – квадратурная составляющая ошибки. Фазовая ошибка

$$\Delta\varphi = \text{arctg} \frac{|\vartheta_\varphi|}{|\vartheta_1| - |\vartheta_A|},$$

относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta\vartheta}{\theta_{1\max}} = \frac{|\vartheta_1| - |\vartheta_2|}{\theta_{1\max}}.$$

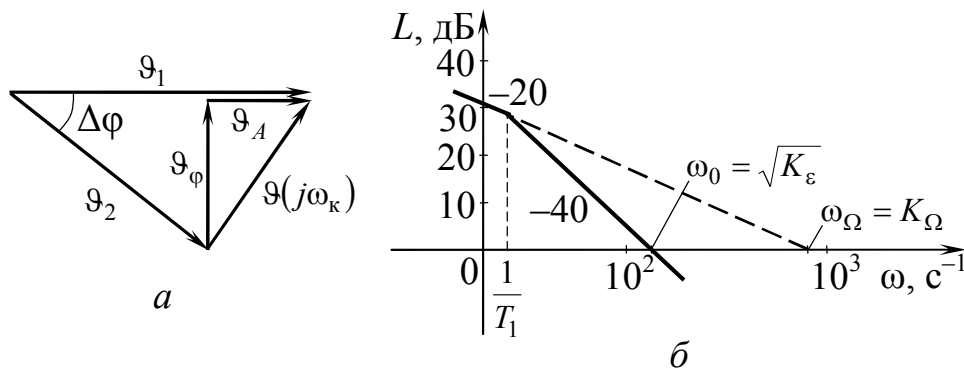


Рис. 7.6. Векторная диаграмма ошибок (а); низкочастотная часть желаемой ЛАЧХ (б)

Если считать, что при частоте ω_k модуль $|W(j\omega_k)| \gg 1$, то комплексная ошибка слежения

$$\vartheta(j\omega_k) \approx \frac{\vartheta_1(j\omega_k)}{W(j\omega_k)} = -\frac{T_1 \omega_k^2}{K_\Omega} \theta_{1\max} + j \frac{\omega_k}{K_\Omega} \theta_{1\max} = \vartheta_A(\omega_k) + j\vartheta_\varphi(\omega_k).$$

С учетом последнего равенства и рис. 7.6, а фазовую ошибку можно определить по приближенной формуле

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_k}{K_\Omega(1 - T_1\omega_k^2/K_\Omega)} \approx \frac{\omega_k}{K_\Omega},$$

а относительную амплитудную ошибку при малом $\Delta\varphi$ – по формуле

$$\frac{\Delta\vartheta}{\theta_{1\max}} \approx \frac{|\vartheta_A|}{\theta_{1\max}} \approx \frac{1}{\theta_{1\max}} \operatorname{Re} \frac{\theta_{1\max}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k^2 T_1}{K_\Omega} = \frac{\omega_k^2}{K_\varepsilon}.$$

Задание значений фазовой и относительной амплитудной ошибок определяет предельное левое положение первой и второй асимптот ЛАЧХ:

$$\omega_\Omega = K_\Omega = \frac{\omega_k}{\Delta\varphi} = \frac{12,56 \cdot 57,3}{1} = 720 \text{ с}^{-1}.$$

Вид низкочастотной части желаемой ЛАЧХ показан на рис. 7.6, б.

Пример. 7.8. Для замкнутой системы комбинированного управления определить уровни компенсирующих сигналов по первой и второй производным от входного воздействия, при которых в системе, обладающей астатизмом первого порядка, устраняются скоростная ошибка и ошибка, зависящая от ускорения. Структурная схема замкнутой системы комбинированного управления приведена на рис. 7.7. Передаточная функция компенсирующего устройства имеет вид

$$\varphi(s) = \tau_1 s + \tau_1 \tau_2 s^2,$$

где τ_1 – отношение крутизны сигнала по первой производной от $g(t)$ к крутизне сигнала по ошибке $e(t)$, τ_2 – отношение крутизны сигнала по второй производной к крутизне сигнала по первой производной от $g(t)$.

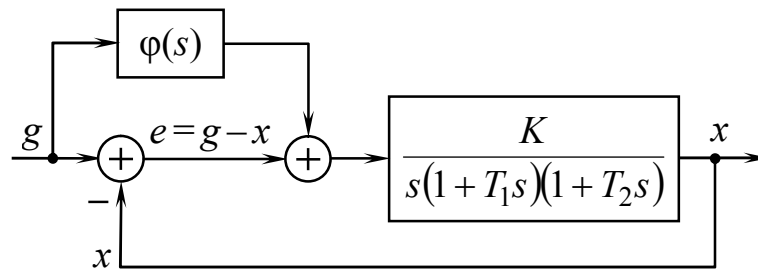


Рис. 7.7. Структурная схема следящей системы комбинированного управления

Решение. В схеме комбинированного управления (рис. 7.7) изображение выходной величины X пропорционально не только изображению ошибки E , но и изображению компенсирующего сигнала $\varphi(s)G$, т. е.

$$X = W(s)[E + \varphi(s)G],$$

$$E = G - X,$$

где $W(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы заданная в виде

$$W(s) = \frac{K}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}. \quad (7.17)$$

Ошибка регулирования в замкнутой системе определяется формулой (6.6), где $W_k(s) = \varphi(s)$, т. е.

$$E = \frac{1 - W(s)\varphi(s)}{1 + W(s)} G = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - K\tau_1\tau_2)s^2 + (1 - K\tau_1)s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K} G. \quad (7.18)$$

Скоростную ошибку определим при подаче на вход сигнала $g(t) = g_0 t$:

$$\begin{aligned} e_{\text{ск}} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - W(s)\varphi(s)}{1 + W(s)} \frac{g_0}{s^2} s = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - W(s)\varphi(s)}{[1 + W(s)]s} = \\ &= g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - K\tau_1\tau_2)s + 1 - K\tau_1}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K} = g_0 \frac{1 - K\tau_1}{K}. \end{aligned}$$

Как видно, при выполнении условия $\tau_1 = 1/K$ скоростная ошибка в системе устраняется.

Ошибка, зависящую от ускорения задающего сигнала, определим при подаче на вход сигнала $g(t) = g_0 t^2$:

$$e_{\text{уск}} = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - W(s)\varphi(s)}{1 + W(s)} \frac{2}{s^3} s = 2g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 - K\tau_1\tau_2)s + 1 - K\tau_1}{[T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K]s}.$$

При выполнении условия $\tau_1 = 1/K$ получаем

$$e_{\text{уск}} = 2g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1 T_2 s + T_1 + T_2 - K\tau_1\tau_2}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K} = 2g_0 \frac{T_1 + T_2 - K\tau_1\tau_2}{K},$$

отсюда следует, что при дополнительном условии $T_1 + T_2 = K\tau_1\tau_2$, также обращается в нуль ошибка, зависящая от ускорения задающего сигнала.

Согласно равенству (7.18) передаточная функция по ошибке замкнутой системы с комбинированным управлением имеет вид

$$\Phi_e(s) = \frac{1 - W(s)\varphi(s)}{1 + W(s)}.$$

Если вести эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы $W_3(s)$, то

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W_3(s)}.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, получаем уравнение, из которого следует

$$W_3(s) = \frac{W(s)[1 + \varphi(s)]}{1 - W(s)\varphi(s)}. \quad (7.19)$$

При подстановке заданных выражений для $W(s)$ и $\varphi(s)$ равенство (7.19) принимает вид

$$W_3(s) = \frac{K(\tau_1\tau_2 s^2 + \tau_1 s + 1)}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - K\tau_1\tau_2)s^2 + (1 - K\tau_1)s}.$$

Отсюда с учетом условий компенсации ошибки

$$\tau_1 = \frac{1}{K},$$

$$\tau_2 = \frac{T_1 + T_2}{K\tau_1} = T_1 + T_2$$

получим

$$W_3(s) = \frac{K(\tau_1\tau_2s^2 + \tau_1s + 1)}{T_1T_2s^3}, \quad (7.20)$$

т. е. эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы соответствует системе с астатизмом третьего порядка.

7.2. Построение желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы и расчет последовательных корректирующих устройств

Пример 7.9. Построить желаемую ЛАЧХ и произвести выбор последовательного корректирующего устройства для системы автоматического регулирования, если передаточная функция разомкнутой системы при отсутствии корректирующего устройства имеет вид

$$W_0(s) = \frac{K}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)(1 + T_4s)},$$

где $T_1 = 0,1$ с, $T_2 = 0,02$ с, $T_3 = 0,01$ с, $T_4 = 0,005$ с.

Система регулирования должна обладать астатизмом первого порядка и удовлетворять следующим показателям качества: а) коэффициент ошибки по скорости $C_1 = 1/200$ с; б) коэффициент ошибки по ускорению $C_2 = 0,06$ с²; в) перерегулирование σ при единичном ступенчатом воздействии не должно превышать 30%; г) время переходного процесса t_p при единичном ступенчатом задающем воздействии не должно быть больше чем 0,8 с при числе колебаний, не превышающем двух.

Решение. В соответствии с изложенным в § 3.3 статическая ошибка в системе с астатизмом первого порядка равна нулю, соответственно, коэффициент статической ошибки $C_0 = 0$. Коэффициент скоростной ошибки $C_1 = 1/K$ (см. пример 3.1), поэтому требуемый коэффициент усиления разомкнутой системы, называемый добротностью по скорости

$$K = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{200} = 200 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь строим асимптотическую ЛАЧХ исходной системы

$$L_0(\omega) = 20 \lg |W_0(j\omega)|,$$

которая представлена на рис. 7.8.

Далее по заданным показателям качества строится желаемая асимптотическая ЛАЧХ. На низкочастотном участке с наклоном -40 дБ/дек

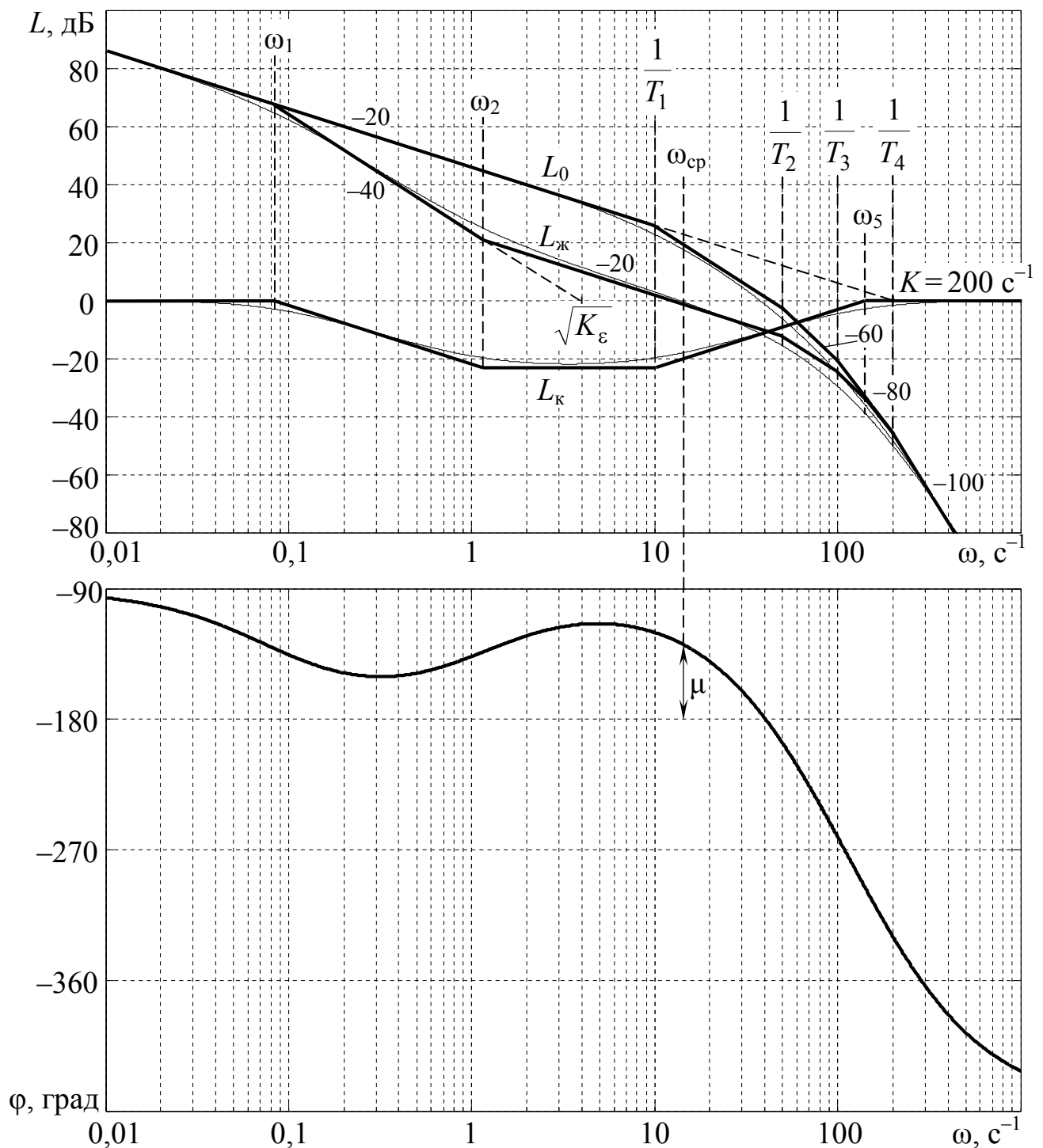


Рис. 7.8. ЛАЧХ и ЛФЧХ к примеру 7.9: μ – запас устойчивости по фазе

желаемая передаточная функция приближенно может быть представлена аналогично (3.31):

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K_{\varepsilon} N(s)}{s^2 L_1(s)},$$

где K_{ε} – коэффициент передачи, называемый добротностью по ускорению; $L_1(s)$ и $N(s)$ – многочлены с единичными коэффициентами при младших членах (при членах s^0). Тогда установившаяся ошибка воспроизведения входного воздействия $g_2(t) = g_2 t^2$ определяется следующим образом:

$$e_{\text{уст}2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W_{\text{ж}}(s)} G_2(s) s,$$

где $G_2(s) = g_2 \frac{2}{s^3}$. Получим

$$e_{\text{уст}2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 L_1(s)}{s^2 L_1(s) + K_{\varepsilon} N(s)} g_2 \frac{2}{s^3} s = \frac{2g_2}{K_{\varepsilon}}. \quad (7.21)$$

Согласно равенству (3.38) коэффициент ошибки по ускорению $C_2 = c_2/2$ определяет составляющую установившейся ошибки, вызванную воздействием $g_2(t) = g_2 t^2$, как $e_{\text{уст}2} = C_2 g_2''(t) = 2C_2 g_2$. С учетом равенства (7.21) имеем $2C_2 g_2 = 2g_2/K_{\varepsilon}$, откуда следует выражение

$$K_{\varepsilon} = \frac{1}{C_2}. \quad (7.22)$$

С учетом заданного значения $C_2 = 0,06 \text{ с}^2$ получим требуемое значение добротности по ускорению

$$K_{\varepsilon} = \frac{1}{0,06} = 16,66 \text{ с}^{-2}$$

и частоту, при которой участок ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек при продолжении до пересечения с осью частот пересекает эту ось,

$$\omega_{\varepsilon} = \sqrt{K_{\varepsilon}} = 4,082 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, для условий по точности участок с наклоном -40 дБ/дек низкочастотной ЛАЧХ проводится через точку $\omega = K = 200 \text{ с}^{-1}$ на оси частот, а участок с наклоном -40 дБ/дек – через точку $\omega_{\varepsilon} = 4,082 \text{ с}^{-1}$. Точка пересечения участков ЛАЧХ с наклонами -20 и -40 дБ/дек определяет первую сопрягающую частоту ω_1 . Аналитически она определяется из равенства значений АЧХ, соответствующих этим участкам,

$$\frac{K}{\omega_1} = \frac{K_{\varepsilon}}{\omega_1^2},$$

откуда имеем

$$\omega_1 = \frac{K_{\varepsilon}}{K} = \frac{16,66}{200} = 0,08333. \quad (7.23)$$

Теперь найдем значение частоты среза $\omega_{\text{ср}}$. Пользуясь номограммами Солодовникова (рис. 6.17), при $\sigma = 30\%$, что соответствует $P_{\text{max}} = 1,3$, получим

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{11,5}{t_p} \approx \frac{11,5}{0,8} \approx 14 \text{ с}^{-1}.$$

Проведем через точку $\omega_{\text{ср}}$ прямую с наклоном 20 дБ на декаду. Поскольку АЧХ, соответствующая этому участку ЛАЧХ, описывается выражением

$$|W_{\text{ж}}(j\omega)| \approx \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega},$$

а примыкающий слева участок с наклоном -40 дБ/дек – выражением

$$W_{\text{ж}}(j\omega) \approx \frac{K_{\varepsilon}}{\omega^2},$$

то, приравнивая правые части этих выражений, получим уравнение относительно сопрягающей частоты ω_2

$$\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_2} = \frac{K_{\varepsilon}}{\omega_2^2},$$

откуда следует

$$\omega_2 = \frac{K_{\varepsilon}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{16,66}{14} = 1,190 \text{ с}^{-1}.$$

Значение ЛАЧХ на частоте ω_2

$$L_1 = 20 \lg |W_{\text{ж}}(j\omega_2)| = 20 \lg \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_2} = 20 \lg \frac{14}{1,19} = 21,4 \text{ дБ}.$$

В рассматриваемом примере $\omega_{\text{ср}}/\omega_2 = 11,76 > 10$, что вполне допустимо. Таким образом, желаемый вид $L_{\text{ж}}$ при $\omega < \omega_{\text{ср}}$ найден. Перейдем к обоснованию формы $L_{\text{ж}}$ при $\omega > \omega_{\text{ср}}$, обращая внимание на то, чтобы на каждом из участков наклон желаемой ЛАЧХ возможно меньше отличался от наклона исходной ЛАЧХ.

Попытаемся удовлетворить заданным условиям качества, ограничившись разностью наклонов между $L_{\text{ж}}$ и L , не превышающей 20 дБ/дек. Тогда изломы желаемой ЛАЧХ будут происходить на сопрягающих частотах $\omega_3 = 1/T_2 = 1/0,02 = 50 \text{ с}^{-1}$, $\omega_4 = 1/T_3 = 1/0,01 = 100 \text{ с}^{-1}$. Начиная с частоты ω_5 желаемая ЛАЧХ совпадает с исходной ЛАЧХ.

Исходя из рис. 7.8, предполагаем, что пересечение исходной и желаемой ЛАЧХ происходит на частоте ω_5 , $\omega_4 < \omega_5 < \omega'_5$, где $\omega'_5 = 1/T_4$, исходная и желаемая асимптотические ЛАЧХ соответствуют АЧХ

$$|W_0(j\omega)| = \frac{K}{T_1 T_2 T_3 \omega^4}, \quad |W_{\text{ж}}(j\omega)| = \frac{K \frac{\omega}{\omega_2}}{\omega^3 \frac{\omega}{\omega_1} T_2 T_3} = \frac{K \omega_1}{\omega_2 T_2 T_3 \omega^3}.$$

Частота ω_5 , соответствующая точке пересечения этих ЛАЧХ, находится из уравнения, получаемого приравниванием правых частей приведенных выражений,

$$\frac{1}{T_1 \omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

откуда

$$\omega_5 = \frac{\omega_2}{T_1 \omega_1} = \frac{1,19}{0,1 \cdot 0,0833} = 142,8 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом желаемая передаточная функция имеет вид

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) (1 + T_2 s) (1 + T_3 s) \left(1 + \frac{s}{\omega_5}\right) (1 + T_4 s)}.$$

Соответствующая этому выражению ФЧХ (см. рис. 7.8) определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_1} + \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_2} - \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_3 - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_5} - \operatorname{arctg} \omega T_4 = \\ &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{0,08333} + \operatorname{arctg} \frac{\omega}{1,19} - \operatorname{arctg} 0,02\omega - \\ &\quad - \operatorname{arctg} 0,01\omega - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{142,8} - \operatorname{arctg} 0,005\omega. \end{aligned}$$

Запас устойчивости определяется видом логарифмических характеристик в области средних частот.

Согласно рис. 7.8 запас устойчивости по фазе

$$\mu = \pi + \varphi(\omega_{\text{cp}}) = 50^\circ.$$

Вычитая ординаты L_0 из ординат желаемой ЛАЧХ $L_{\text{ж}}$ (рис. 7.8), получим ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства, которая соответствует передаточной функции

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_0(s)} = \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right) (1 + T_1 s)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_5}\right)} = \frac{(1 + 0,8403s)(1 + 0,1s)}{(1 + 12s)(1 + 0,007s)}.$$

В рассматриваемой задаче в качестве корректирующего устройства нужно использовать интегро-дифференцирующее звено (рис. 7.9).

Передаточная функция пассивного звена (рис. 7.9, а)

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)},$$

где

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= R_1 \parallel \frac{1}{C_1 s} = \frac{R_1}{C_1 s \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right)} = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s}, \\ Z_2(s) &= R_2 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{1 + R_2 C_2 s}{C_2 s}. \end{aligned}$$

Тогда

$$W_K(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{1 + \left[\tau_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) + \tau_2 \right] s + \tau_1 \tau_2 s^2}, \quad (7.24)$$

где $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$.

Недостатком пассивного звена является существенное влияние на характеристики внутреннего сопротивления источника напряжения u_1 и сопротивления нагрузки.

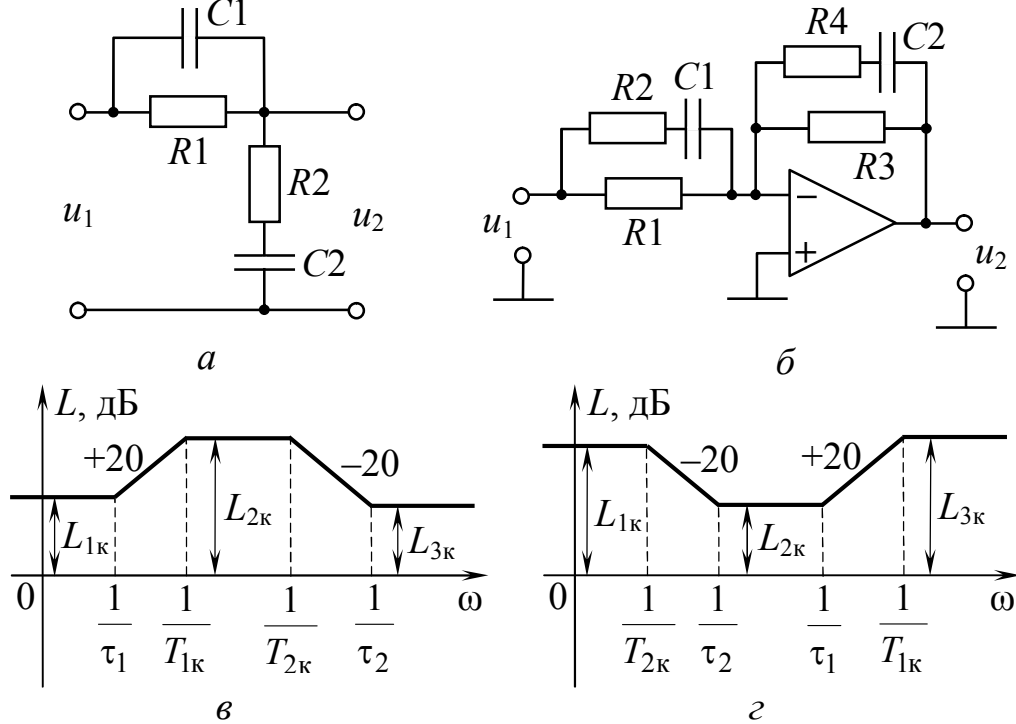


Рис. 7.9. Интегро-дифференцирующие звенья: пассивное (а), на ОУ(б)

Передаточная функция звена на ОУ (рис. 7.9, б)

$$W_K(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)},$$

где

$$Z_1(s) = R_1 \parallel \frac{1 + R_2 C_1 s}{C_1 s} = \frac{R_1 (1 + R_2 C_1 s)}{1 + (R_1 + R_2) C_1 s},$$

$$Z_2(s) = R_3 \parallel \frac{1 + R_4 C_2 s}{C_2 s} = \frac{R_3 (1 + R_4 C_2 s)}{1 + (R_3 + R_4) C_2 s}.$$

Следовательно,

$$W_K(s) = K_K \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + T_{1K} s)(1 + T_{2K} s)}, \quad (7.25)$$

где $K_K = R_3 / R_1$,

$$\tau_1 = (R_1 + R_2) C_1; \quad \tau_2 = R_4 C_2; \quad T_{1K} = R_2 C_1; \quad T_{2K} = (R_3 + R_4) C_2.$$

Возможные варианты асимптотической ЛАЧХ цепи на ОУ (рис. 7.9, б) представлены на рис. 7.9, в и з, где $L_{1K} = 20 \lg K_K$,

$$L_{3к} = 20 \lg \frac{K_k \tau_1 \tau_2}{T_1 T_2} = 20 \lg \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$$

$$\text{в) } T_{1к} > T_{2к}, L_{2к} = 20 \lg K_k \frac{\tau_1}{T_{1к}} = 20 \lg R_3 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}; \quad (7.26)$$

$$\text{г) } \tau_1 < \tau_2, L_{2к} = 20 \lg K_k \frac{\tau_2}{T_{2к}} = 20 \lg \frac{R_3 R_4}{R_1 (R_1 + R_4)}. \quad (7.27)$$

Очевидно, что при $T_{1к} > T_{2к}$ имеем $\tau_1 > T_{1к} > T_{2к} > \tau_2$, а при $\tau_1 < \tau_2$ — $T_{2к} > \tau_2 > \tau_1 > T_{1к}$.

В рассматриваемом примере необходимо иметь ЛАЧХ последовательного корректирующего устройств вида рис. 7.9, з, где $L_{1к} = L_{3к} = 0$, следовательно $K_k = 1$, $R_3 = R_1$;

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Кроме того, поскольку АЧХ корректирующего устройства на интервале $\omega_1 < \omega < \omega_2$ (рис. 7.8) описывается выражением

$$|W_k(j\omega)| = \frac{\omega_1}{\omega},$$

то его коэффициент передачи на интервале $\omega_2 < \omega < 1/T_1$ будет равен

$$|W_k(j\omega_2)| = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Следовательно,

$$L_2 = 20 \lg \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

С учетом равенства (7.27) при $K_k = 1$ получаем

$$\frac{\tau_2}{T_{2к}} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Должны также выполняться равенства для сопрягающих частот:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_{2к}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}, \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{\tau_1}, \quad \omega_5 = \frac{1}{T_{1к}}.$$

Отсюда следует, что

$$\tau_1 = T_1 = 0,1 \text{ с}; \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{1,19} = 0,840 \text{ с};$$

$$T_{1к} = \frac{1}{\omega_5} = \frac{1}{142,8} = 0,00700 \text{ с}; \quad T_{2к} = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{0,08333} = 12 \text{ с}.$$

Задавшись приемлемым значением емкости $C_2 = 12$ мкФ; найдем $R_3 + R_4 = T_{2к}/C_2 = 1$ МОм; $R_4 = \tau_2/C_2 = 0,84/(12 \cdot 10^{-6}) = 70$ кОм; $R_3 = 10^6 - 70 \cdot 10^3 = 930$ кОм. Поскольку $R_1 = R_3 = 930$ кОм и

$$\frac{\tau_1}{T_{1к}} = \frac{R_1}{R_2} + 1; \quad R_2 = R_1 \frac{T_{1к}}{\tau_1 - T_{1к}} = 0,93 \cdot 10^6 \frac{0,007}{0,1 - 0,007} = 70 \text{ кОм}.$$

Тогда

$$C_1 = \frac{T_{1к}}{R_2} = \frac{0,007}{70 \cdot 10^3} = 0,1 \text{ мкФ}.$$

Проверка:

$$\tau_1 = (R_1 + R_2)C_1 = (0,93 \cdot 10^6 + 0,07 \cdot 10^6)0,1 \cdot 10^{-6} = 0,1 \text{ с}.$$

Отметим, что значения сопротивлений $R_1 = R_3 = 930 \text{ кОм}$ велики с точки зрения уменьшения влияния ошибки, вызванной разностью входных токов ОУ. Желательно уменьшить значения $R_1 = R_3$ по крайней мере на порядок, для чего необходимо соответственно увеличить емкость C_2 .

В заключение для проверки полученных результатов необходимо построить график переходного процесса в скорректированной системе.

Пример 7.10. Произвести динамический синтез следящей системы по следующим качественным показателям: ошибка $e_{\max} \leq 0,1$ град при максимальной скорости слежения $\Omega_{1\max} = 20$ град/с и максимальном ускорении $e_{1\max} = 5$ град/с²; запас устойчивости оценивается по показателю колебательности $M \leq 1,5$. Передаточная функция исходной нескорректированной системы имеет вид

$$W_0(s) = \frac{K'_\Omega}{s(1 + T_0s)},$$

где $T_0 = 0,1 \text{ с}$.

Решение. По формуле (3.33) определяем запретную область по точности (рис. 7.10):

$$\omega_k = \frac{\varepsilon_{1\max}}{\Omega_{1\max}} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ с}^{-1}, \quad K_\Omega = \omega_\Omega = \frac{\Omega_{1\max}}{e_{\max}} = \frac{20}{0,1} = 200 \text{ с}^{-1},$$

По формуле (6.16)

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{1\max}}{e_{\max}} = \frac{5}{0,1} = 50 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_\varepsilon = \sqrt{K_\varepsilon} = \sqrt{50} = 7,071 \text{ с}^{-1}.$$

Желаемую ЛАЧХ системы $L_{ж}$ в области низких частот формируем из двух отрезков прямых, имеющих наклоны -20 дБ/дек и -40 дБ/дек с точкой излома на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T_1} = 0,25 \text{ с}^{-1}.$$

Для обеспечения требуемой точности желаемую характеристику $L_{ж}$ приподнимаем над запретной областью на 3 дБ, т. е. необходимое значение общего коэффициента усиления определяется из условия

$$K'_\Omega = \sqrt{2}K_\Omega = 282,8 \text{ с}^{-1}$$

и частоту точки пересечения с осью частот участка желаемой ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек

$$\omega'_\varepsilon = \sqrt{K'_\varepsilon} = \sqrt{\sqrt{2}K_\varepsilon} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot 50} = 8,409 \text{ с}^{-1}.$$

Обратим внимание на то, что коэффициент усиления исходной системы K'_Ω заранее не задан и принимаем его равным полученному из условий точности.

По заданному максимальному значению коэффициента колебательности $M=1,5$ определяем параметры среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек. Обозначив через ω_2 частоту точки пересечения участка с наклоном -40 дБ/дек желаемой асимптотической ЛАЧХ со среднечастотным участком, которым соответствуют выражения

$$|W_{\text{ж}}(j\omega)| = \begin{cases} K'_\varepsilon/\omega^2 & \text{при } \omega_k \leq \omega \leq \omega_2, \\ \omega_{\text{ср}}/\omega & \text{при } \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3, \end{cases} \quad (7.28)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – частота среза, получаем уравнение для определения ω_2

$$\frac{K'_\varepsilon}{\omega_2^2} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_2},$$

откуда следует, что

$$\omega_2 = \frac{K'_\varepsilon}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (7.29)$$

Обозначив ординату желаемой асимптотической ЛАЧХ на частоте ω_2 через L_2 , с учетом равенств (7.28) имеем

$$L_2 = 20 \lg \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_2} = 20 \lg \frac{K'_\varepsilon}{\omega_2^2}. \quad (7.30)$$

Приравнявая правые части первого равенства (6.34) и равенства (7.30), получаем выражение частоты ω_2 , не требующее в отличие от (7.29), знания частоты среза $\omega_{\text{ср}}$,

$$\omega_2 = \sqrt{K'_\varepsilon \frac{M-1}{M}}. \quad (7.31)$$

Сопрягающей частоте (7.31) соответствует постоянная времени $T_2=1/\omega_2$, т. е.

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{K'_\varepsilon}} \sqrt{\frac{M}{M-1}}. \quad (7.32)$$

С учетом вычисленных значений параметров имеем

$$T_2 = \frac{1}{8,409} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,2060 \text{ с},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 4,855 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{K'_\varepsilon}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 50}{4,855} = 14,56 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения постоянной времени T_3 и соответствующей ей сопрягающей частоты $\omega_3 = 1/T_3$ воспользуемся выражением, известным из [10],

$$T_3 = \frac{T_2}{h} = \frac{T_2(M-1)}{M+1}, \quad (7.33)$$

где $h = \omega_3/\omega_2$ – протяженность среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ. Находим

$$T_3 = \frac{0,206(1,5-1)}{1,5+1} = 0,0412 \text{ с},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{0,0412} = 24,272 \text{ с}^{-1},$$

$$L_3 = 20 \lg \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_3} = 20 \lg \frac{14,56}{27,272} = -5,45 \text{ дБ}.$$

Согласно рис. 7.10 передаточная функция скорректированной системы, т. е. соответствующая желаемой ЛАЧХ, может быть записана в виде

$$W_{\text{ск}}(s) = W_{\text{ж}}(s) = \frac{K'_{\Omega}(1+T_2s)}{s(1+T_1s)(1+T_3s)}.$$

В соответствии с показанной на рис. 7.10 асимптотической ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства для коррекции системы следует использовать интегро-дифференцирующее звено с передаточной функцией (7.25)

$$W_{\text{пк}}(s) = \frac{W_{\text{ск}}(s)}{W_0(s)} = K_{\text{к}} \frac{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)}{(1+T_{1\text{к}}s)(1+T_{2\text{к}}s)},$$

изображенное на рис. 7.9, б, где $\tau_1 = T_0$, $\tau_2 = T_2$, $T_{1\text{к}} = T_3$, $T_{2\text{к}} = T_1$.

Поскольку согласно рис. 7.9, г и 7.10 $L_{1\text{к}} = 20 \lg K_{\text{к}} = 0$, то коэффициент усиления последовательного корректирующего устройства $K_{\text{к}} = 1$.

Значение $L_{3\text{к}}$ равно отношению коэффициентов усиления желаемой ЛАЧХ на высокочастотном участке с наклоном -40 дБ/дек и исходной ЛАЧХ на участке $\omega > 1/T_0$. Высокочастотный участок желаемой ЛАЧХ описывается уравнением прямой

$$L_{\text{ж}}(\omega) = 20 \lg K_{\text{в}} - 40 \lg \omega,$$

где коэффициент $K_{\text{в}}$ определяется подстановкой $L_{\text{ж}}(\omega_3) = L_3$, $\omega = \omega_3$ в это уравнение. Тогда при $\omega > \omega_3$ получаем

$$L_{\text{ж}}(\omega) = L_3 + 40 \lg \omega_3 - 40 \lg \omega.$$

Учитывая, что при $\omega > 1/T_0$

$$|W_0(j\omega)| \approx \frac{K'_{\Omega}}{T_0 \omega^2}, \quad L_0(\omega) = 20 \lg \frac{K'_{\Omega}}{T_0} - 40 \lg \omega,$$

получаем

$$L_{3\text{к}} = L_{\text{ж}}(\omega) - L_0(\omega) = L_3 + 40 \lg \omega_3 - 20 \lg \frac{K'_{\Omega}}{T_0}.$$

Подставляя известные численные значения параметров, находим

$$L_{3\text{к}} = -5,45 + 40 \lg 24,272 - 20 \lg \frac{282,8}{0,1} = -19,075 \text{ дБ},$$

что соответствует графику $L_{\text{пк}}$, приведенному на рис. 7.10.

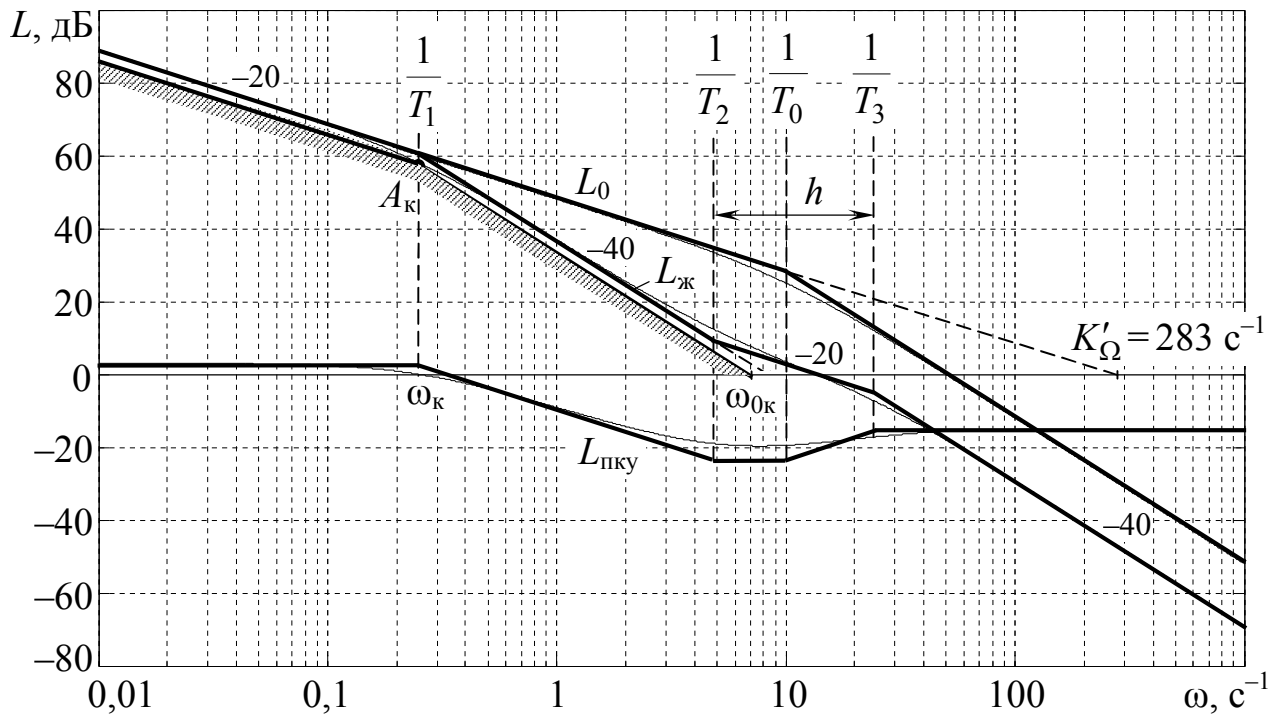


Рис. 7.10. Асимптотические ЛАЧХ к примеру 7.10

С учетом рис. 7.9, ε постоянные времени корректирующего устройства $T_{2к} = T_1 = 4$ с, $\tau_2 = T_2 = 0,206$ с, $\tau_1 = T_0 = 0,1$ с, $T_{1к} = T_3 = 0,0412$ с.

Для проверки правильности вычислений параметров корректирующего устройства вычислим модуль его частотной передаточной функции на интервале частот $1/\tau_2 < \omega < 1/\tau_1$.

$$|W_{\text{пкы}}(j\omega)| = \frac{K_k \tau_2}{T_{2к}} = \frac{0,206}{4} = 0,0515 = -25,76 \text{ дБ.}$$

Это же значение найдем как отношение коэффициента усиления, соответствующего среднечастотному участку желаемой ЛАЧХ и равного $\omega_{\text{ср}}$, и коэффициента передачи исходной системы на участке ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек, равного K'_Ω , т. е. на интервале $1/\tau_2 < \omega < 1/\tau_1$

$$|W_{\text{пкы}}(j\omega)| = \frac{\omega_{\text{ср}}}{K'_\Omega} = \frac{14,56}{282,8} = 0,05148 = -25,77 \text{ дБ.}$$

Таким образом, значения коэффициента передачи последовательно корректирующего устройства на интервале частот $1/\tau_2 < \omega < 1/\tau_1$, вычисленные для проверки двумя способами, совпали.

7.3. Расчет корректирующих обратных связей

Пример 7.11. Рассчитать дополнительную обратную связь для системы, рассмотренной в примере 7.10.

Решение. Найдем дополнительную обратную связь $W_{\text{ос}}(s)$, эквивалентную интегро-дифференцирующему звену $W_{\text{пкы}}(s)$, полученному в

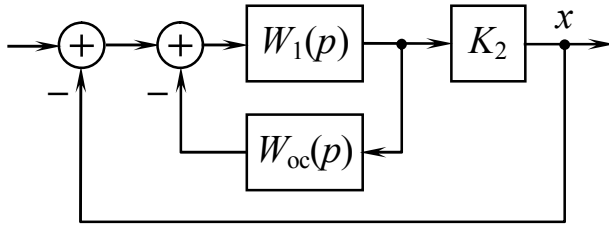


Рис. 7.11

примере 7.10. Предположим, что дополнительная обратная связь охватывает часть системы с передаточной функцией

$$W_1(s) = \frac{K_1}{s(1 + T_0s)},$$

где $K_1K_2 = K'_\Omega$; $T_0 = 0,1\text{ с}$; $K'_\Omega = 282,8\text{ с}^{-1}$.

Тогда передаточную функцию корректирующей обратной связи $W_{oc}(s)$ рассчитываем по формуле (6.43), где $W_{ж}(s) = W_{пкч}(s)W_0(s)$ – желаемая передаточная функция разомкнутой системы,

$$W_{oc}(s) = \frac{1}{W_1(s)} \left[\frac{1}{W_{пкч}(s)} - 1 \right]. \quad (7.34)$$

Учитывая выражение для $W_1(s)$ и использованное в примере 7.10 выражение (7.25)

$$W_{пкч}(s) = K_k \frac{(1 + T_2s)(1 + T_0s)}{(1 + T_1s)(1 + T_3s)}, \quad (7.35)$$

где $K_k = 1$, получим

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}s^2(1 + \tau_3s)}{1 + T_2s}, \quad (7.36)$$

где

$$K_{oc} = \frac{T_1 + T_3 - T_2 - T_0}{K_1},$$

$$\tau_3 = \frac{T_1T_3 - T_2T_0}{T_1 + T_3 - T_2 - T_0}.$$

Подставляя численные значения постоянных времени, найдем

$$\tau_3 = \frac{4 \cdot 0,0412 - 0,206 \cdot 0,1}{4 + 0,0412 - 0,206 - 0,1} = 0,0386\text{ с},$$

$$K_{oc} = \frac{4 + 0,0412 - 0,206 - 0,1}{K_1} = \frac{3,7352}{K_1}.$$

Передаточная функция разомкнутого внутреннего контура

$$W_{вн}(s) = W_1(s)W_{oc}(s) = \frac{K_1K_{oc}s(1 + \tau_3s)}{(1 + T_2s)(1 + T_0s)},$$

соответствующие ей ЛАЧХ при $K_1K_{oc} = 3,7352\text{ с}^{-1}$, $T_0 = 0,1\text{ с}$, $T_2 = 0,206\text{ с}$, $\tau_3 = 0,0386\text{ с}$ представлены на рис. 7.12.

Точная практическая реализация звена с передаточной функцией (7.36) невозможна из-за того, что порядок многочлена числителя (7.36) превышает порядок многочлена знаменателя. На рис. 7.12 асимптотическая ЛАЧХ цепи обратной связи $L_{oc}(\omega)$ в виде суммы $L_{oc} = L_{oc1} + L_{oc2} + L_{oc3}$

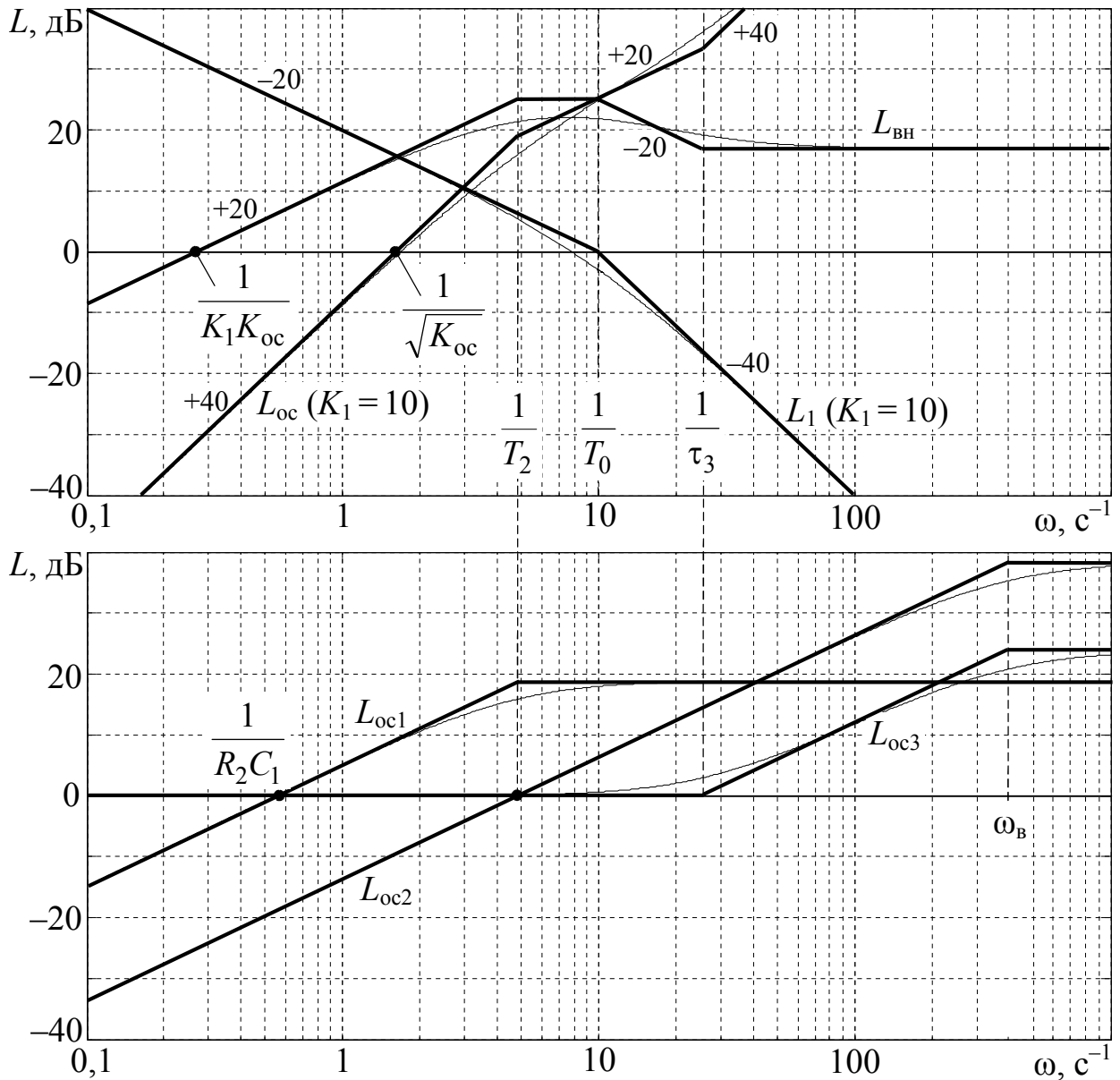


Рис. 7.12. Асимптотические ЛАЧХ к примеру 7.11

ЛАЧХ трех физически реализуемых звеньев, а на рис. 7.13 – одна из возможных реализаций этой цепи. Используются два реальных дифференцирующих звена на рис. 2.19, б и инерционное форсирующее звено, которое в отличие от звена (рис. 2.21, б) является инвертирующим. Для определения параметров звеньев используются соотношения:

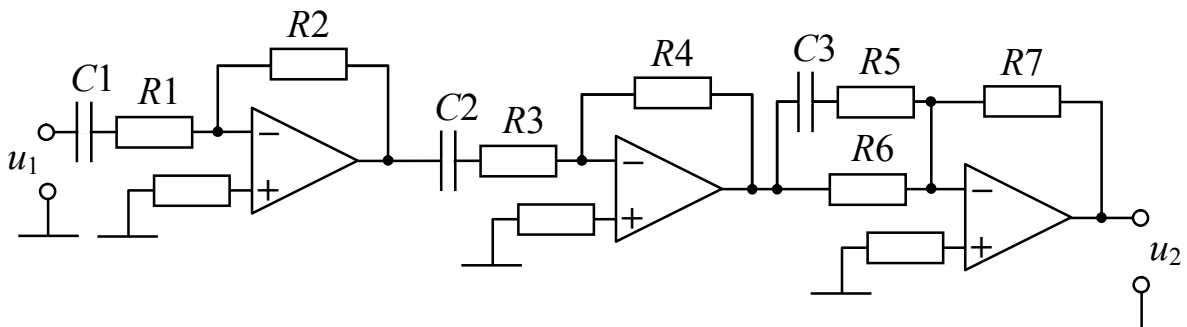


Рис. 7.13. Трехзвенная цепь корректирующей обратной связи

$$R_1 C_1 = T_2, \quad R_2 C_1 = \frac{K_{oc}}{T_2}; \quad R_4 C_2 = T_2, \quad R_3 C_2 = \frac{1}{\omega_B};$$

$$(R_5 + R_6) C_3 = \tau_3, \quad R_5 C_3 = \frac{1}{\omega_B}, \quad \frac{R_7}{R_6} = 1,$$

ω_B – верхняя частота, выше которой вид частотной характеристики цепи обратной связи не играет существенной роли.

Сопrotivления R_2 , R_4 и $R_6 \parallel R_7$ для уменьшения ошибки звеньев, вызванной разностью входных токов ОУ, не должны превышать определенных значений, зависящих от параметров ОУ [13]. Поэтому выберем $R_2 = R_4 = 51$ кОм. Тогда

$$C_1 = \frac{K_{oc}}{R_2 T_2}; \quad R_1 = \frac{T_2}{C_1}; \quad C_2 = \frac{T_2}{R_4} = \frac{0,206}{51 \cdot 10^3} = 4,04 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Округлим значение C_2 до ближайшего стандартного значения $C_2 = 3,9$ мкФ.

Приняв $\omega_B = 400 \text{ с}^{-1}$ и учитывая равенство $R_4/R_3 = T_2 \omega_B$, найдем значение

$$R_3 = \frac{R_4}{T_2 \omega_B} = \frac{51 \cdot 10^3}{0,206 \cdot 400} = 618,9 \text{ Ом,}$$

Которое округлим до стандартного значения $R_3 = 620$ Ом.

Из равенств $R_6 \parallel R_7 = 50$ кОм и $R_6 = R_7$ следует, что $R_6 = R_7 = 100$ кОм, что совпадает со стандартным значением. Поскольку

$$\frac{R_5 + R_6}{R_5} = \tau_3 \omega_B,$$

то

$$\frac{R_6}{R_5} = \tau_3 \omega_B - 1 = 0,0386 \cdot 400 - 1 = 14,44,$$

$$R_5 = \frac{R_6}{\tau_3 \omega_B - 1} = \frac{100 \cdot 10^3}{14,44} = 6,925 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Выберем стандартное значение $R_5 = 6,8$ кОм. Использование реальной цепи обратной связи повышает порядок передаточной функции $W_{вн}(s)$.

В связи с необходимостью проверки устойчивости внутреннего контура системы отметим, что, как видно из рис. 7.12, а, частота среза внутреннего контура $\omega_{ср.вн} = 1/(K_1 K_{oc})$ отстоит от ближайшей сопрягающей частоты ЛАЧХ $L_{вн}$ на одну декаду, поэтому фазовый сдвиг внутреннего контура на частоте среза близок к $\varphi_{вн} \approx +\pi/2$. Следовательно, устойчивость внутреннего контура обеспечена.

Пример 7.12. Для системы (рис. 7.14) даны передаточные функции

$$W_1(s) = \frac{K_1}{1 + T_1 s}, \quad W_2(s) = \frac{K_2}{s(1 + T_2 s)},$$

где $K_1 = 10$, $T_1 = 2,5$ с; $K_2 = 100$ с⁻¹, $T_2 = 0,0167$ с.

Требуется рассчитать параметры корректирующих устройств $W_{\text{пкы}}(s)$ и $W_{\text{ос}}(s)$ так, чтобы получить передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{K(1 + \tau_{1\text{ск}}s)}{s(1 + T_{1\text{ск}}s)(1 + T_{2\text{ск}}s)},$$

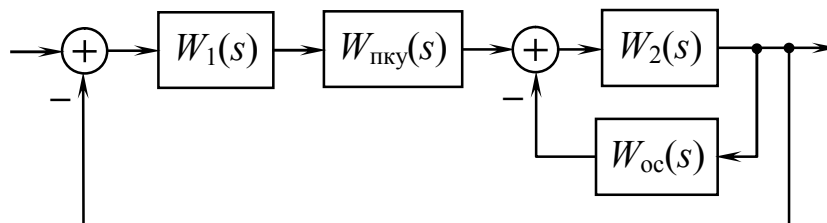


Рис. 7.14. Структурная схема скорректированной системы к примеру 7.12

где $K = 1000$, $T_{1\text{ск}} = 1$ с, $T_{2\text{ск}} = 0,008$ с, $\tau_{1\text{ск}} = 0,05$ с.

Решение. Согласно рис. 7.14 передаточная функция разомкнутой исходной системы (состоящей из функционально необходимых элементов) имеет вид

$$W_0(s) = \frac{K_1 K_2}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}.$$

Из рис. 7.15 видно, что ЛАЧХ исходной системы $L_0(\omega) = 20\lg|W_0(j\omega)|$ располагается ниже ЛАЧХ $L_{\text{ск}}(\omega) = 20\lg|W_{\text{ск}}(j\omega)|$. Так как корректирующая отрицательная обратная связь $W_{\text{ос}}(s)$ может только уменьшить коэффициент передачи, то она не может поднять ЛАЧХ $L_0(\omega)$ в области частот, где $\omega > 0,4$ с⁻¹, т.е. в данном случае невозможно осуществить коррекцию только с помощью обратной связи. Для компенсации постоянной времени $T_1 = 2,5$ с необходима также последовательная коррекция, например с помощью форсирующего звена (рис. 2.21, б), имеющего передаточную функцию вида

$$W_{\text{пкы}}(s) = \frac{1 + \tau_{\text{пкы}}s}{1 + T_{\text{пкы}}s}, \quad (7.37)$$

где $\tau_{\text{пкы}} = (R_1 + R_2)C_1$, $T_{\text{пкы}} = R_1 C_1$. Это звено (рис. 7.16) отличается от дифференцирующего звена (рис. 2.19, б) тем, что входной сигнал подается на неинвертирующий вход ОУ, а левый вывод RC -цепи заземлен.

В результате введения последовательного корректирующего устройства передаточная функция исходной системы принимает вид

$$W'_0(s) = \frac{K_1 K_2 (1 + \tau_{\text{пкы}}s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_{\text{пкы}}s)},$$

где $K_1 K_2 = K$.

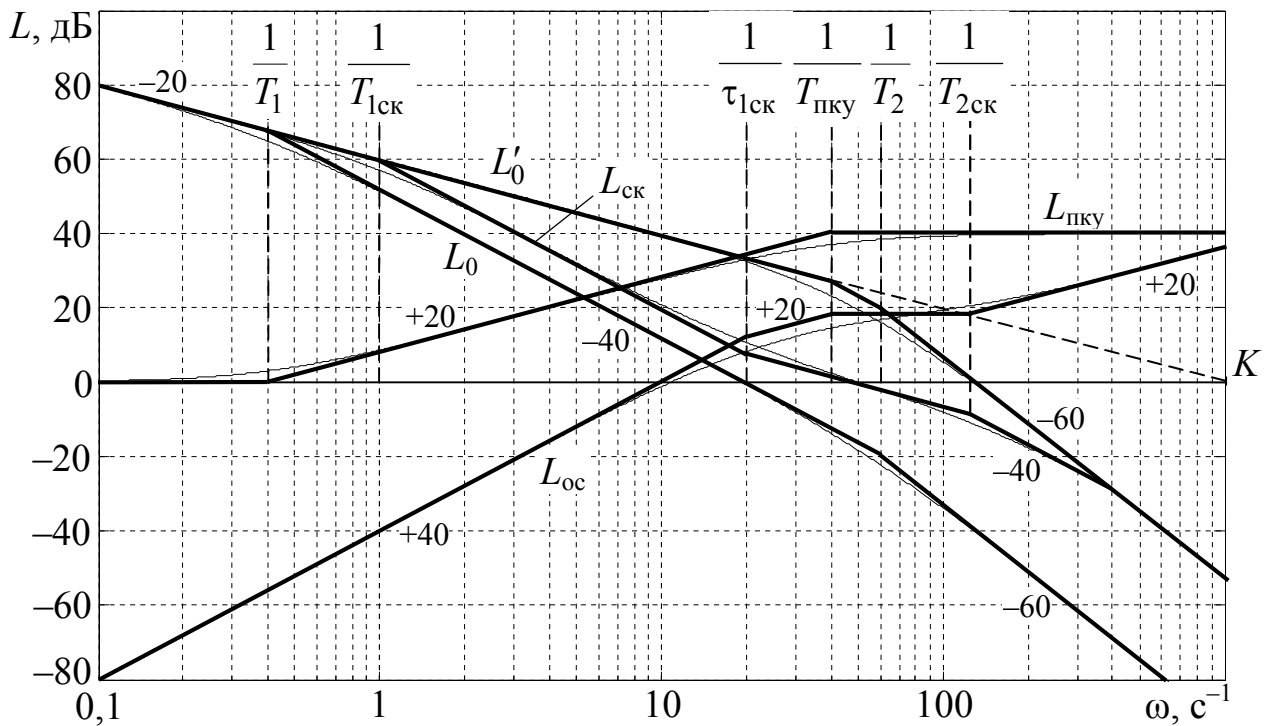


Рис. 7.15. Асимптотические ЛАЧХ к примеру 7.12: исходной системы $L_0(\omega)$, скорректированной системы $L_{ck}(\omega)$

С учетом выбора постоянной времени $\tau_{пкy} = T_1$ получим

$$W'_0(s) = \frac{K}{s(1 + T_2s)(1 + T_{пкy}s)}$$

где постоянную времени последовательного корректирующего устройства $T_{пкy}$ выберем так, чтобы ЛАЧХ $L'_0 = 20 \lg |W'_0(j\omega)|$ проходила выше желаемой ЛАЧХ $L_{ck}(\omega)$ в существенной для данной системы области частот. Согласно рис. 7.15 возьмем $T_{пкy} = 0,025$ с. Тогда ЛАЧХ L'_0 располагается выше L_{ck} до частоты $\omega = 400$ с⁻¹.

Переходя к определению передаточной функции $W_{oc}(s)$ звена корректирующей обратной связи, рассмотрим передаточную функцию разомкнутого контура для замкнутой системы (рис. 7.14)

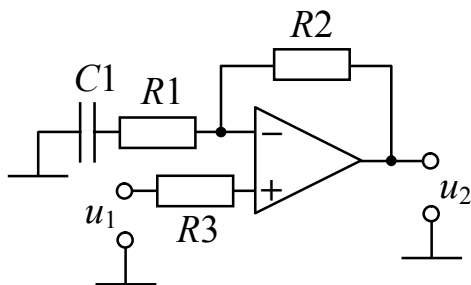


Рис. 7.16. Схема последовательного корректирующего устройства

$$W(s) = W'_1(s) \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_{oc}(s)}$$

где $W'_1(s) = W_1(s)W_{пкy}(s)$ – передаточная функция неохваченной обратной связью части разомкнутой системы. Передаточную функцию $W(s)$ представим в виде

$$W(s) = W'_1(s)W'(s) \frac{1}{W_{oc}(s)}, \tag{7.38}$$

где

$$W'(s) = \frac{W_2(s)W_{oc}(s)}{1 + W_2(s)W_{oc}(s)}. \tag{7.39}$$

Далее замечаем, что в диапазоне частот, в котором

$$|W_2(j\omega)W_{oc}(j\omega)| \gg 1, \quad (7.40)$$

имеем $W'(s) \approx 1$, а передаточная функция (7.38)

$$W(s) = \frac{W_1'(s)}{W_{oc}(s)}. \quad (7.41)$$

Для диапазонов частот, в которых

$$|W_2(j\omega)W_{oc}(j\omega)| < 1,$$

будем иметь $W'(s) \approx W_2(s)W_{oc}(s)$, и передаточная функция разомкнутого контура (рис. 7.14) сводится к виду

$$W(s) \approx W_1'(s)W_2(s). \quad (7.42)$$

Из полученных соотношений видно, что корректирующая обратная связь видоизменяет частотную характеристику разомкнутой системы лишь в диапазоне частот, в котором выполняется условие (7.40). В этом диапазоне частот передаточная функция разомкнутой системы примерно соответствует равенству (7.41), т. е. практически не зависит от параметров охваченной обратной связью части $W_2(s)$. При использовании выражения (7.41) необходимо проверять выполнение условия (7.40).

Подставляя $W(s) = W_{ck}(s)$, из равенства (7.41) получаем

$$W_{oc}(s) = \frac{W_1'(s)}{W_{ck}(s)}, \quad (7.43)$$

где $W_1'(s) = W_1(s)W_{пкы}(s)$.

В данном примере корректирующая обратная связь эффективна на частотах $\omega > 1/T_{1ck}$, где $\omega T_{1ck} > 1$, и в выражении для $W_{ck}(s)$ можно пренебречь единицей по сравнению с $T_{1ck}s$. Тогда передаточная функция скорректированной системы, равная желаемой передаточной функции, упрощается:

$$W_{ck}(s) = \frac{K(1 + \tau_{1ck}s)}{T_{1ck}s^2(1 + T_{2ck}s)}.$$

Передаточная функция неохваченной обратной связью части системы с учетом принятого условия $\tau_{пкы} = T_1$ имеет вид

$$W_1'(s) = \frac{K_1}{1 + T_{пкы}s}.$$

Используя равенство (7.43), получаем

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}s^2(1 + T_{2ck}s)}{(1 + T_{пкы}s)(1 + \tau_{1ck}s)} = \frac{0,01s^2(1 + 0,008s)}{(1 + 0,025s)(1 + 0,05s)}, \quad (7.44)$$

где $K_{oc} = K_1 T_{1ck} / K = 10 \cdot 1 / 1000 = 0,01 \text{ с}^{-1}$.

Проверим устойчивость контура корректирующей обратной связи и выполнения условия (7.40). Передаточная функция этого внутреннего разомкнутого контура

$$W_{\text{вн}}(s) = W_2(s)W_{\text{ос}}(s) = \frac{s(1 + T_{2\text{ск}}s)}{(1 + \tau_{1\text{ск}}s)(1 + T_{\text{пк}}s)(1 + T_2s)},$$

которой соответствует асимптотическая ЛАЧХ

$$L_{\text{вн}}(\omega) = L_2(\omega) + L_{\text{ос}}(\omega)$$

и ЛФЧХ

$$\varphi_{\text{вн}}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega \tau_{1\text{ск}} - \arctg \omega T_{\text{пк}} - \arctg \omega T_2 + \arctg \omega T_{1\text{ск}},$$

которые представлены на рис. 7.17.

Как видно из рис. 7.17, запас по фазе внутреннего контура составляет $\mu \approx 90^\circ$, что свидетельствует об устойчивости этого контура. Кроме того, условие (7.40) выполняется в диапазоне частот $1 \text{ с}^{-1} < \omega < \omega_{\text{ср.вн}} \approx 400 \text{ с}^{-1}$, что подтверждает правомерность использования формулы (7.43).

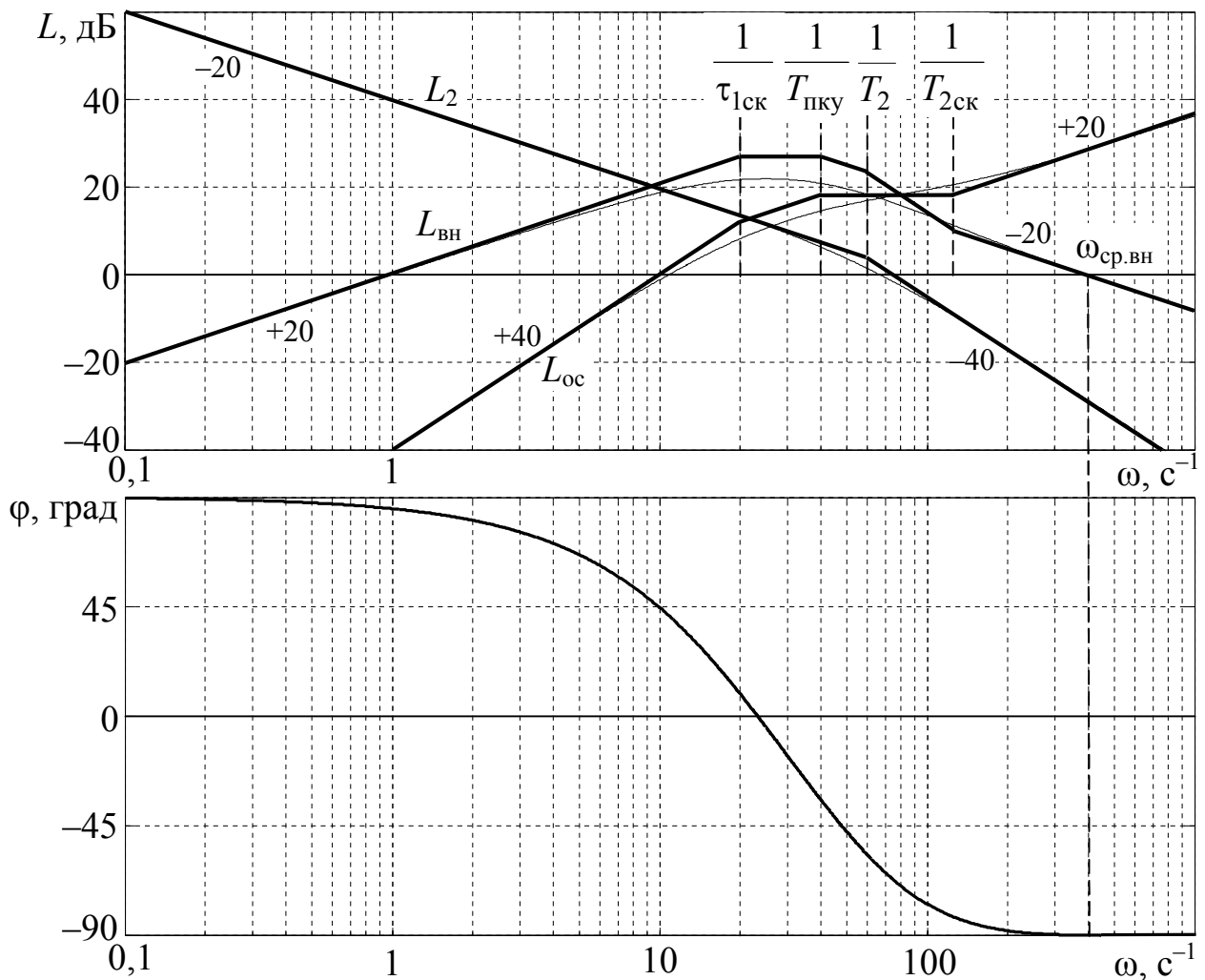


Рис. 7.17. Логарифмические частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура системы (рис. 7.14)

Реализация цепи с передаточной функцией $W_{oc}(s)$ (7.44) возможна по схеме, представленной на рис. 7.13, с учетом соотношений

$$R_1 C_1 = \tau_{1ск}, \quad R_3 C_2 = T_{пкы}, \quad R_7/R_6 = 1, \quad (R_5 + R_6)C_3 = T_{2ск};$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{K_{oc}}{\tau_{1ск}^2}, \quad R_4 C_2 = \tau_{1ск}, \quad \frac{\tau_{1ск}}{T_{пкы}} = \frac{R_4}{R_3}.$$

Постоянную времени $R_5 C_3$ выбираем из условия

$$R_5 C_3 < 1/\omega_{ср.вн},$$

при выполнении которого она практически не влияет на действие корректирующей обратной связи.

7.4. Расчет систем комбинированного управления

Пример 7.13. Определить параметр корректирующего устройства по задающему воздействию, при котором устраняется скоростная ошибка системы (рис. 7.18), звенья которой имеют следующие передаточные функции:

$$W_k(s) = \tau s, \quad W_1(s) = K_1,$$

$$W_2(s) = \frac{K_2}{s(1 + T_1 s)},$$

где $K_1 = 10$, $K_2 = 10 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,02 \text{ с}$; τ – коэффициент, определяющий уровень корректирующего сигнала.

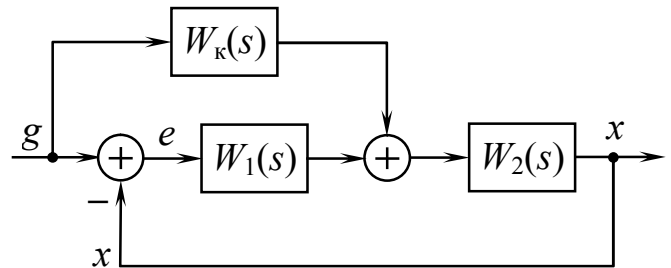


Рис. 7.18. Структурная схема системы комбинированного управления

Решение. Для рассматриваемой системы (рис. 7.18) справедливы уравнения относительно изображений по Лапласу:

$$\begin{aligned} X(s) &= W_1(s)W_2(s)E(s) + W_k(s)W_2(s)G(s), \\ E(s) &= G(s) - X(s), \end{aligned} \quad (7.45)$$

где $X(s) \doteq x(t)$, $E(s) \doteq e(t)$, $G(s) \doteq g(t)$. Решая эти уравнения относительно изображения ошибки $E(s)$, получаем

$$E(s) = \Phi_e(s)G(s),$$

где передаточная функция замкнутой системы для ошибки

$$\Phi_e(s) = \frac{1 - W_k(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}. \quad (7.46)$$

Подставив заданные выражения для передаточных функций $W_1(s)$, $W_2(s)$ и $W_k(s)$, найдем

$$\Phi_e(s) = \frac{T_1 s^2 + (1 - \tau K_2)s}{T_1 s^2 + s + K_1 K_2}.$$

Поскольку установившаяся скоростная ошибка, возможная при $g(t) = g_1 t$ и $G(s) = g_1/s^2$, определяется как

$$e_{\text{ск.уст}} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) G(s) s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1 s^2 + (1 - \tau K_2) s}{T_1 s^2 + s + K_1 K_2} \frac{g_1}{s^2} s = g_1 \frac{1 - \tau K_2}{K_1 K_2},$$

то условием устранения скоростной ошибки является равенство

$$1 - \tau K_2 = 0.$$

Следовательно, требуемое значение параметра корректирующего устройства

$$\tau = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ с.}$$

Пример 7.14. Определить параметры корректирующего устройства по задающему воздействию и произвести расчет других необходимых корректирующих устройств для следящей системы с комбинированным управлением (рис. 7.18), у которой

$$\begin{aligned} W_k(s) &= \tau_1 s, \\ W_1(s) &= 1, \\ W_2(s) &= \frac{K_\Omega}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \end{aligned}$$

$T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,05$ с. Система должна обладать астатизмом второго порядка и обеспечивать слежение с ошибкой $e_{\text{max}} \leq 2$ угл. мин., при максимальной скорости слежения $\Omega_{\text{max}} = 30$ град/с и максимальном ускорении $\varepsilon_{\text{max}} = 30$ град/с². Запас устойчивости определяется показателем колебательности $M \leq 1,5$.

Решение. Определим эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы, работающей только по отклонению $W_3(s)$, для которой передаточная функция замкнутой системы для ошибки есть

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W_3(s)}. \quad (7.47)$$

Приравнявая правые части равенств (7.46) и (7.47), находим

$$W_3(s) = \frac{[W_1(s) + W_k(s)] W_2(s)}{1 - W_k(s) W_2(s)}. \quad (7.48)$$

Подставив в (7.48) заданные выражения для передаточных функций $W_k(s)$, $W_1(s)$ и $W_2(s)$, получим

$$W_3(s) = \frac{K_\Omega (1 + \tau_1 s)}{s [T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1 - K_\Omega \tau_1]}$$

Как видно, при $\tau_1 = 1/K_\Omega$ система будет обладать астатизмом второго порядка и скоростная ошибка будет отсутствовать.

Однако в нашем случае, возможно, потребуются и другие корректирующие устройства кроме цепи регулирования по задающему воздей-

вию, если желаемая эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы $W_{\text{э.ж}}(s)$ не совпадет с $W_3(s)$.

Первая асимптота желаемой ЛАЧХ представляет собой прямую с наклоном 40 дБ/дек. Её положение определяется базовой частотой (рис. 7.19):

$$\omega_0 = \sqrt{K_\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{e_{\max}}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 60}{2}} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Как показано в [10], для получения запаса устойчивости, соответствующего значению показателя колебательности M , желаемая передаточная функция в области средних частот должна иметь вид

$$W_{\text{э.ж}}(s) = \frac{\omega_0^2(1 + T_{1\text{ж}}s)}{s^2(1 + T_{2\text{ж}}s)},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= K_\varepsilon = 900 \text{ с}^{-2}, \\ T_{1\text{ж}} &= \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{30} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,0575 \text{ с}, \\ T_{2\text{ж}} &= \frac{M-1}{M+1} T_1 = \frac{1,5-1}{1,5+1} 0,0575 = 0,0115 \text{ с}. \end{aligned}$$

ЛАЧХ $L_{\text{э.ж}}$, соответствующая передаточной функции $W_{\text{э.ж}}(s)$, показана на рис. 7.19.

Пусть известна желаемая передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi_{\text{ж}}(s) = \frac{W_{\text{э.ж}}(s)}{1 + W_{\text{э.ж}}(s)}, \quad (7.49)$$

которая с учетом выражения (7.48) при $W_3(s) = W_{\text{э.ж}}(s)$, $W_1(s)W_2(s) = W(s) = W_{\text{ж}}(s)$ принимает вид

$$\Phi_{\text{ж}}(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s) \left[1 + \frac{W_{\text{к}}(s)}{W_1(s)} \right]}{1 + W_{\text{ж}}(s)} = \Phi_1(s) + \Phi_2(s), \quad (7.50)$$

где

$$\Phi_1(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{1 + W_{\text{ж}}(s)}; \quad \Phi_2(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)W_{\text{к}}(s)/W_1(s)}{1 + W_{\text{ж}}(s)} = \Phi_1(s) \frac{W_{\text{к}}(s)}{W_1(s)}; \quad (7.51)$$

$W_{\text{э.ж}}(s)$ – желаемая эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы с учетом действия компенсирующей цепи $W_{\text{к}}(s)$; $W_{\text{ж}}(s)$ – желаемая передаточная функция разомкнутой исходной системы без учета цепи $W_{\text{к}}(s)$.

Из выражений (7.51) видно, что $\Phi_1(s)$ представляет собой желаемую передаточную функцию замкнутой системы без звена $W_{\text{к}}(s)$.

Из первого равенства (7.51) можно получить желаемую передаточную функцию исходной системы

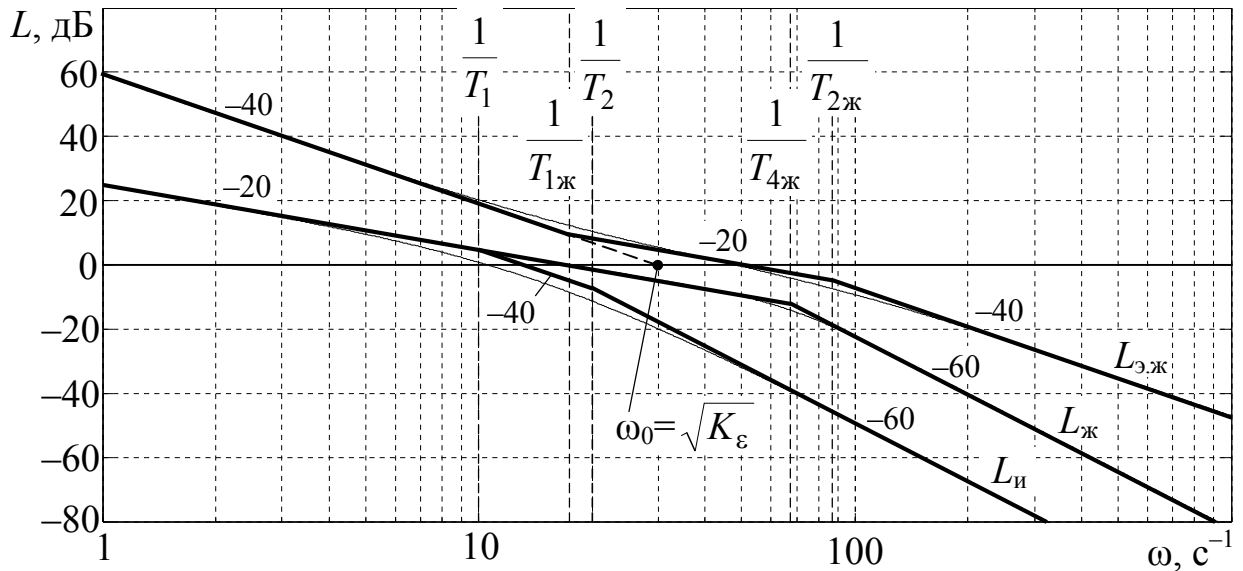


Рис. 7.19. ЛАЧХ к примеру 7.14: $L_{и}$ – исходной системы, $L_{ж}$ – желаемая исходной системы, $L_{эж}$ – желаемая эквивалентной разомкнутой системы (с учетом регулирования по задающему воздействию)

$$W_{ж}(s) = \frac{\Phi_1(s)}{1 - \Phi_1(s)}, \quad (7.52)$$

используемую при расчете дополнительных (кроме $W_{к}(s)$) корректирующих устройств.

При заданной передаточной функции $W_{э.ж}(s)$ в области средних частот по формуле (7.49) найдем

$$\Phi_{ж}(s) = \frac{K_{\varepsilon}(1 + T_{1ж}s)}{K_{\varepsilon} + K_{\varepsilon}T_{1ж}s + s^2 + T_{2ж}s^3} = \Phi_1(s) + \Phi_2(s),$$

где $K_{\varepsilon} = \omega_0^2$;

$$\Phi_1(s) = \frac{K_{\varepsilon}}{K_{\varepsilon} + K_{\varepsilon}T_{1ж}s + s^2 + T_{2ж}s^3}; \quad (7.53)$$

$$\Phi_2(s) = \Phi_1(s)T_{1ж}s.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (7.51), которое можно записать в виде

$$\Phi_2(s) = \Phi_1(s) \frac{W_{к}(s)}{W_1(s)},$$

получаем $W_{к}(s)/W_1(s) = T_{1ж}s$. Отсюда при $W_1(s) = 1$ имеем

$$\tau_1 = T_{1ж} = 0,0575 \text{ с},$$

что определяет требуемый уровень компенсирующего сигнала.

Подставляя выражение (7.53) в равенство (7.52), находим желаемую передаточную функцию разомкнутой исходной системы

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{K_{\varepsilon}}{s(K_{\varepsilon}T_{1\text{ж}} + s + T_{2\text{ж}}s^2)} = \frac{1/T_{1\text{ж}}}{s\left(1 + \frac{1}{K_{\varepsilon}T_{1\text{ж}}}s + \frac{T_{2\text{ж}}}{K_{\varepsilon}T_{1\text{ж}}}s^2\right)}. \quad (7.54)$$

Подставляя численные значения параметров, получим желаемую передаточную функцию разомкнутой исходной системы

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{1}{0,05759s\left(1 + \frac{1}{900 \cdot 0,0575}s + \frac{0,0115}{900 \cdot 0,0575}s^2\right)} =$$

$$= \frac{17,4}{s(1 + 0,0193s + 0,000222s^2)}.$$

Сравнивая эту передаточную функцию с передаточной функцией разомкнутой нескорректированной системы

$$W(s) = \frac{K_{\Omega}}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)},$$

видим, что необходимо выбрать $K_{\Omega} = 17,4 \text{ с}^{-1}$. Однако условия

$$T_1 + T_2 = 0,0193 \text{ с}, \quad T_1T_2 = 0,000222 \text{ с}^{-2}$$

не выполняются, поскольку у исходной системы

$$T_1 + T_2 = 0,1 + 0,05 = 0,15 \text{ с}, \quad T_1T_2 = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005 \text{ с}^{-2}.$$

Необходимо введение корректирующих устройств, снижающих коэффициенты $T_1 + T_2$ при s , а T_1T_2 при s^2 . Это может быть сделано введением жесткой обратной связи K_3 , охватывающей звено $K_2/(1+T_2s)$, и гибкой обратной связи K_4s , охватывающей два звена совместно (рис. 7.20).

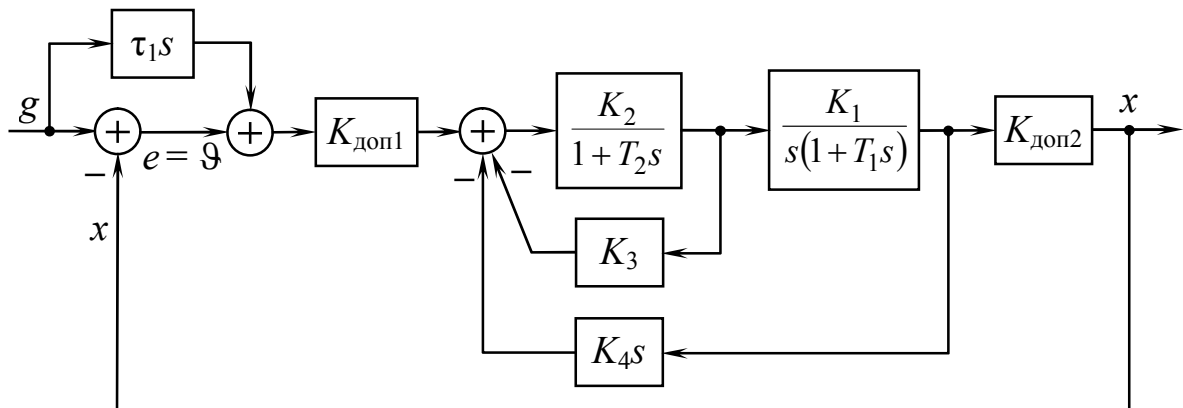


Рис. 7.20. Структурная схема скорректированной системы

Передаточная функция звена $K_2/(1+T_2s)$ после охвата жесткой обратной связью принимает вид

$$\frac{K'_2}{1 + T'_2s},$$

где

$$K'_2 = \frac{K_2}{1 + K_2K_3}; \quad T'_2 = \frac{T_2}{1 + K_2K_3},$$

т.е. в результате охвата отрицательной жесткой обратной связью коэффициент усиления K_2 и постоянная времени T_2 уменьшаются в $1 + K_2K_3$ раз.

Тогда передаточная функция части, охваченной гибкой обратной связью, будет определяться как

$$\begin{aligned} W'(s) &= \frac{K_1K_2'}{s(1+T_1s)(1+T_2's)} \left[1 + \frac{K_1K_2'K_4s}{s(1+T_1s)(1+T_2's)} \right] = \\ &= \frac{K_1K_2'}{s \left[1 + K_1K_2'K_4 + (T_1+T_2')s + T_1T_2's^2 \right]} = \frac{K'_\Omega}{s(1+T_3s+T_4^2s^2)}, \end{aligned} \quad (7.55)$$

где

$$K'_\Omega = \frac{K_1K_2'}{1+K_1K_2'K_4}; \quad T_3 = \frac{T_1+T_2'}{1+K_1K_2'K_4}; \quad T_4^2 = \frac{T_1T_2'}{1+K_1K_2'K_4}.$$

Учитывая выражения для K_2' и T_2' , получаем

$$\begin{aligned} K'_\Omega &= \frac{K_1K_2}{1+K_2K_3+K_1K_2K_4}; \quad T_3 = \frac{T_1(1+K_2K_3)+T_2}{1+K_2K_3+K_1K_2K_4}; \\ T_4^2 &= \frac{T_1T_2}{1+K_2K_3+K_1K_2K_4}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

где K_2K_3 и $K_1K_2K_4$ – коэффициенты усиления разомкнутых контуров жесткой и гибкой обратных связей соответственно.

Как видно из равенств (7.56) в результате введения внутренних обратных связей уменьшились в $1+K_2K_3+K_1K_2K_4$ раз коэффициент усиления охватываемой обратной связью части $K_1K_2 = K'_\Omega$ и коэффициенты при s^2 и s^3 в знаменателе передаточной функции этой части. Уменьшение коэффициента усиления компенсируется введением дополнительных безинерционных усилителей вне охватываемой дополнительными обратными связями части системы ($K_{\text{доп1}}$ и $K_{\text{доп2}}$).

Сравнивая выражения (7.54) и (7.55), получаем уравнения с двумя неизвестными K_3 и K_4

$$\begin{aligned} \frac{T_1(1+K_2K_3)+T_2}{1+K_2K_3+K_1K_2K_4} &= T_{3\text{ж}}, \\ \frac{T_1T_2}{1+K_2K_3+K_1K_2K_4} &= T_{4\text{ж}}^2, \end{aligned}$$

где желаемые значения $T_{3\text{ж}} = 0,0193$ с, $T_{4\text{ж}}^2 = 0,000222$ с⁻². Из второго уравнения находим

$$1+K_2K_3+K_1K_2K_4 = \frac{T_1T_2}{T_{4\text{ж}}^2} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,000222} = 22,52.$$

Из первого уравнения определяем коэффициент усиления разомкнутого контура жесткой обратной связи

$$K_2 K_3 = \frac{T_{3ж} T_2}{T_{4ж}^2} - 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{0,0193 \cdot 0,05}{0,000222} - 1 - \frac{0,05}{0,1} = 2,847.$$

Тогда из второго уравнения найдем коэффициент усиления разомкнутого контура гибкой обратной связи (при разомкнутом контуре жесткой обратной связи)

$$K_1 K_2 K_4 = \frac{T_1 T_2}{T_{4ж}^2} - 1 - K_2 K_3 = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,000222} - 1 - 2,847 = 18,68.$$

Теперь при известных коэффициентах K_1 и K_2 можно рассчитать коэффициенты K_3 и K_4 .

Пример 7.15. Проверить, что при найденных в предыдущем примере значениях параметров передаточная функция системы совпадает с желаемой $W_{эж}(s)$.

Решение. По формулам (7.56) находим

$$K'_\Omega = \frac{17,4}{1 + 2,847 + 18,68} = 0,7724,$$

$$T_3 = \frac{0,1(1 + 2,847) + 0,05}{1 + 2,847 + 18,68} = 0,01930 \text{ с},$$

$$T_4^2 = \frac{0,1 \cdot 0,05}{1 + 2,847 + 18,68} = 0,000222 \text{ с}^2.$$

Напомним, что уменьшение коэффициента усиления $K_\Omega = K_1 K_2$ до значения K'_Ω компенсируется введением дополнительных усилителей с общим коэффициентом усиления $K_\Omega / K'_\Omega = 1 + K_2 K_3 + K_1 K_2 K_4 = 22,53$.

Как видно, параметры исходной системы, скорректированной дополнительными жесткой и гибкой обратными связями, совпадают с желаемыми.

Теперь передаточную функцию исходной системы, скорректированной дополнительными жесткой и гибкой обратными связями,

$$W_{ж}(s) = \frac{K_\Omega}{s(1 + T_3 s + T_4^2 s^2)},$$

и передаточную функцию $W_{к}(s) = \tau_1 s = 0,0575s$ подставим в равенства (7.51) и (7.50) при $W_1(s) \equiv 1$. Тогда получим

$$\Phi_1(s) = \frac{W_{ж}(s)}{1 + W_{ж}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_\Omega} s + \frac{T_3}{K_\Omega} s^2 + \frac{T_4^2}{K_\Omega} s^3},$$

$$\Phi_2(s) = \Phi_1(s) W_{к}(s) = \tau_1 s \Phi_1(s),$$

$$\Phi_{ж}(s) = \Phi_1(s) + \Phi_2(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \frac{1}{K_\Omega} s + \frac{T_3}{K_\Omega} s^2 + \frac{T_4^2}{K_\Omega} s^3}.$$

Из равенства (7.49) определяем эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы, учитывающую влияние корректирующей цепи по задающему воздействию,

$$W_{\text{эж}}(s) = \frac{\Phi_{\text{ж}}(s)}{1 - \Phi_{\text{ж}}(s)} = \frac{K_{\Omega}(1 + \tau_1 s)}{(1 - K_{\Omega}\tau_1)s + T_3 s^2 + T_4^2 s^3},$$

где при найденных в предыдущем примере значениях $K_{\Omega} = 17,4 \text{ с}^{-1}$, $\tau_1 = T_{1\text{ж}} = 0,0575 \text{ с}$ имеем $1 - K_{\Omega}\tau_1 = 0,0005$. Следовательно, с учетом допустимой погрешности вычислений можно считать, что $1 - K_{\Omega}\tau_1 \approx 0$. Тогда получим

$$W_{\text{эж}}(s) = \frac{(K_{\Omega}/T_3)(1 + \tau_1 s)}{s^2 [1 + (T_4^2/T_3)s]},$$

где

$$\frac{K_{\Omega}}{T_3} = \frac{17,4}{0,0193} = 901,6 \text{ с}^{-2} \approx \omega_0^2;$$

$$\frac{T_4^2}{T_3} = \frac{0,000222}{0,0193} = 0,0115 \text{ с} = T_{2\text{ж}}.$$

Как видно, параметры скорректированной системы совпадают с параметрами эквивалентной желаемой передаточной функции.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х частях. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др.; Под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с.
2. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др.; Под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2005. – 567 с.
3. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1978. – 256 с.
4. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
5. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с.
6. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов; Под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
7. Пантелеев А.В., Бартаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
8. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов / В.А. Бесекерский, А.Н. Герасимов, С.В. Лучко и др.; Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
9. Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования: Учеб. пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.
10. Бесекерский В.А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1970. – 576 с.
11. Расчет автоматических систем: Учеб. пособие для вузов / А.В. Фатеев, А.А. Вавилов, Л.П. Смольников и др.; Под ред. А.В. Фатеева. – М.: Высшая школа, 1973. – 336 с.
12. Белов Г.А. Электронные цепи и микросхемотехника: Учеб. пособие для вузов. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2004. – 780 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Основные понятия и определения	4
1.1. Сущность проблемы автоматического управления	4
1.2. Фундаментальные принципы управления	8
1.3. Основные виды автоматического управления	12
1.4. Классификация систем автоматического управления	19
Контрольные вопросы	21
Глава 2. Математическое описание систем автоматического управления	22
2.1. Уравнения динамики и статики. Линеаризация	22
2.2. Основные свойства преобразования Лапласа	27
2.3. Формы записи линейных дифференциальных уравнений. Передаточные функции	30
2.4. Частотные характеристики	33
2.5. Временные характеристики	38
2.6. Элементарные звенья и их характеристики	42
2.7. Примеры простейших усилительно-преобразовательных звеньев систем автоматического управления	60
2.8. Структурные схемы линейных систем и их преобразования	64
2.9. Передаточные функции и уравнения замкнутой системы	73
2.10. Построение модели в форме пространства состояний по дифференциальному уравнению n -го порядка	78
Контрольные вопросы	84
Глава 3. Анализ линейных систем управления	86
3.1. Требования, предъявляемые к системам управления	86
3.2. Анализ чувствительности	90
3.3. Оценка точности регулирования в установившемся режиме	94
3.4. Анализ устойчивости линеаризованных моделей систем управления	107
Контрольные вопросы	113
Глава 4. Критерии устойчивости линейных систем автоматического управления	114
4.1. Алгебраические критерии устойчивости	114
4.2. Частотные критерии устойчивости	117

4.3. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам	139
4.4. Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы	145
Контрольные вопросы	154
Глава 5. Оценки качества переходного процесса	155
5.1. Оценка качества переходного процесса при ступенчатом воздействии	155
5.2. Оценка качества регулирования при гармонических воздействиях	158
5.3. Корневые оценки качества	159
5.4. Метод корневого годографа	167
5.5. Интегральные оценки качества переходных процессов	177
5.6. Частотные методы оценки качества регулирования	183
5.7. Управляемость и наблюдаемость систем	193
Контрольные вопросы	205
Глава 6. Синтез систем управления	206
6.1. Задачи синтеза систем управления	206
6.2. Синтез систем управления, инвариантных к воздействиям	213
6.3. Обеспечение требуемой точности воспроизведения задающего воздействия	218
6.4. Формирование среднечастотной области желаемой ЛАЧХ	228
6.5. Вычисление передаточных функций корректирующих устройств	232
6.6. Примеры корректирующих устройств. Последовательные корректирующие устройства	236
Контрольные вопросы	247
Глава 7. Примеры расчета и синтеза систем управления	248
7.1. Выбор параметров САУ по требуемой точности	248
7.2. Построение желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы и расчет последовательных корректирующих устройств	259
7.3. Расчет корректирующих обратных связей	269
7.4. Расчет систем комбинированного управления	277

Учебное издание

Белов Геннадий Александрович

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.
ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие

Редактор

Корректор

Компьютерная верстка и правка А.В. Серебрянникова

Подписано в печать Формат 60×84/16. Бумага газетная.

Печать оперативная. Гарнитура Times. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .

Тираж экз. Заказ № .

Издательство Чувашского университета

Типография университета

428015 Чебоксары, Московский просп., 15