Лабораторная работа 4 (15).
Полюса и нули на z-плоскости. БИХ-системы

Цели лабораторной работы:

1) научиться использовать полюса и нули передаточной функции дискретных фильтров для графической визуализации частотной реакции без использования математики;

2) научиться использовать эти знания для качественного определения реакции БИХ-фильтров.

Основные сведения

В этой работе мы уделим больше внимания общим вопросам дискретных фильтров, которые характеризуются как полюсами, так и нулями. Такие фильтры известны как ***рекурсивные***, поскольку они используют обратную связь, или ***фильтры с бесконечной импульсной характеристикой*** (БИХ-фильтры). Благодаря обратной связи мы сможем обеспечить гораздо более высокую чувствительность, чем КИХ фильтры аналогичной сложности.

Подготовка к работе

Эта подготовительная работе расширяет круг тем, рассмотренных в работе 3(14), поскольку передаточная функция имеет еще и полюса.

Вопрос 1. Представьте схему с обратной связью, как на рис. 1. Покажите, что разностное уравнение, описывающее выход $x_0(nT)$ и вход $u(nT)$ сумматора, выглядит так:

$$x_0(nT) = u[nT] - a_1 \cdot x_0[(n-1)T] - a_2 \cdot x_0[(n-2)T], \quad (1)$$

где nT – дискретные моменты времени, T – время модуля задержки (т.е. время между дискретизации).

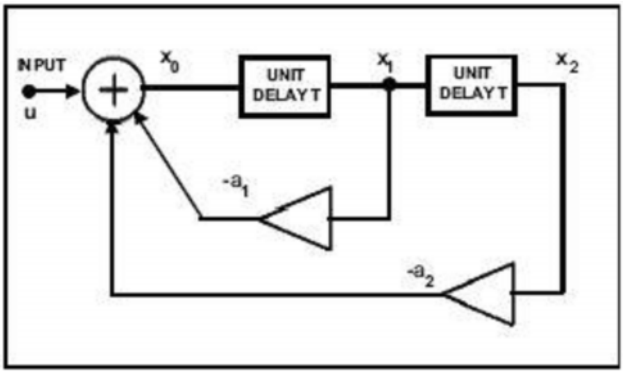

Рис. 1. Схема системы с обратной связью 2-го порядка

Запишите частотный коэффициент передачи дискретной системы. Для этого на вход системы подайте сигнал $e^{jT\omega}$. Убедитесь в том, что он совпадает с выражением (2):

$$\frac{x_0}{u} = \frac{1}{1 + a_1 \cdot e^{-jT\omega} + a_2 \cdot e^{-j2T\omega}}. \quad (2)$$

Обратите внимание, что x_0/u не является функцией дискретного времени n, а является функцией частоты.

Вопрос 2. Используйте полученный результат для получения модуля частотной характеристики $|x_0/u|$ рассматриваемой дискретной системы.

Задайте T =1 и зарисуйте результат для случая a_1 = -1,6; a_2 = 0,902 при диапазоне ω = 0…π рад/с. Разметьте ось частот как в Гц, так и в рад/с. Пик частотной характеристики должен прийтись примерно на 0,09 Гц.

Вопрос 3. В уравнении (2), замените $e^{jT\omega}$ на z. Получившиеся уравнение, являющееся математическим описанием передаточной функции, выглядит так:

$$H_{x_0} = \frac{x_0}{u} = \frac{1}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2}. \quad (3)$$

Многочлен $(z^2 + a_1 \cdot z + a_2)$ может быть записан в форме $(z - p_1)(z - p_2)$.

Используя значения a_1 и a_2 из вопроса 2, найдите корни p_1 и p_2, которые являются *полюсами*. Отметьте положения p_1 и p_2 на плоскости z. Расстояние между этими точками и точками единичной окружностью имеют ключевую важность.

Задание 1 (для домашней проработки). Запишите формулу для p_1, выразив её через a_1 и a_2. Обретите внимание, что в зависимости от значений a_1 и a_2 p_1 может быть комплексным или действительным числом. Определите, при каких условиях p_1 будет комплексным. Выразите комплексное значение p_1 в полярных координатах. Обратите внимание, что модуль $|p_1|$ не зависит от a_1. Выразите p_2 через p_1.

Вопрос 4. Убедитесь из проделанных рассуждений, что модуль частотной характеристики H_{x0} можно записать в виде:

$$H_{x_0} = \frac{x_0}{u} = \frac{1}{\left|e^{jT\omega} - p_1\right| \cdot \left|e^{jT\omega} - p_2\right|}. \quad (4)$$

Формула (4) дает ключ к графическому методу оценки модуля частотной характеристики. Для получения оценки модуля частотной характеристики, как и ранее, будем использовать T =1.

Зарисуйте модуль знаменателя для заданных значений в диапазоне ω = 0…π. Предлагается на том же графике изобразить модули каждого из множителей, чтобы наблюдать влияние каждого и полюсов. Сделайте вывод о том, в каком диапазоне частот более всего проявляется влияние каждого из полюсов на модуль частотной характеристики.

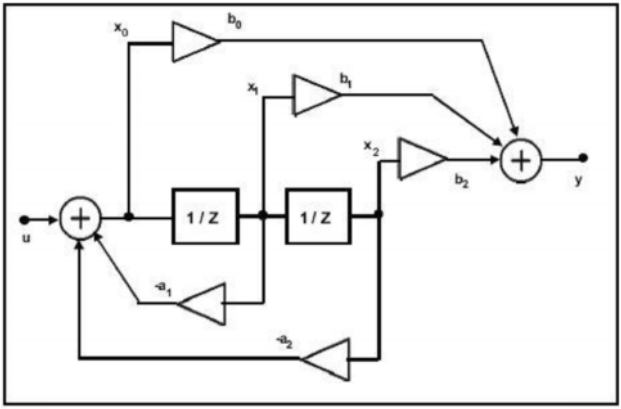

Рис. 2. Блок-диаграмма системы 2-го порядка
с положительной обратной связью

Вопрос 5. Измените модель на рис. 1, заменив модули задержки на коэффициенты 1/*z*. Путем простых алгебраических выкладок запишите передаточную функцию системы (см. формулу 3).

Вопрос 6. Покажите, что передаточная функция системы на рис. 2 выглядит так, как записано в формуле (5):

$$H_{y(z)} = \frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} . \quad (5)$$

Вопрос 7. Постройте модуль частотной характеристики для следующих параметров системы:

(1) $b_0 = b_2 = 1$; $b_1 = 2$;
(2) $b_0 = b_2 = 1$; $b_1 = -2$;
(3) $b_0 = 1$; $b_2 = 0$; $b_1 = -1$.

Значения a_1 и a_2 возьмите из вопроса 2. Какие из этих значений дают ФНЧ? А какие ФВЧ? А какие значения параметров дают полосовой фильтр?

Вопрос 8. Рассмотрите дискретную систему с частотой дискретизации 20 кГц. Оцените значения полюсов и нулей (путем приравнивания к нулю полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (5)), которые обеспечат реализацию ФНЧ с частотой среза около 3 кГц. Получите оценку параметров ФВЧ.

Вопрос 9. Для такой же частоты дискретизации, что и в вопросе 8, оцените значения полюсов и нулей, которые соответствуют полосовому фильтру с центральной частотой около 3,1 кГц и полосой пропускания на 3 дБ 500 Гц.

Порядок выполнения работы

Настройка комплекта NI ELVIS/SIGEx

Откройте вкладку 15 программного интерфейса SIGEx SFP.

Примечание: Для остановки работы VI SIGEx по окончании эксперимента предпочтительнее использовать кнопку STOP самого SIGEX SPF, чем стандартную кнопку LabVIEW. Это позволит программе провести нормальное завершение работы, и закрыть все открытые каналы сбора данных.

Попросите преподавателя проверить вашу работу перед тем, как продолжить

Часть 1. БИХ фильтр без опережающей связи (с 1 полиномом в числителе). Резонатор второго порядка.

В этой части мы соберем и исследуем систему, представленную на рис. 3.

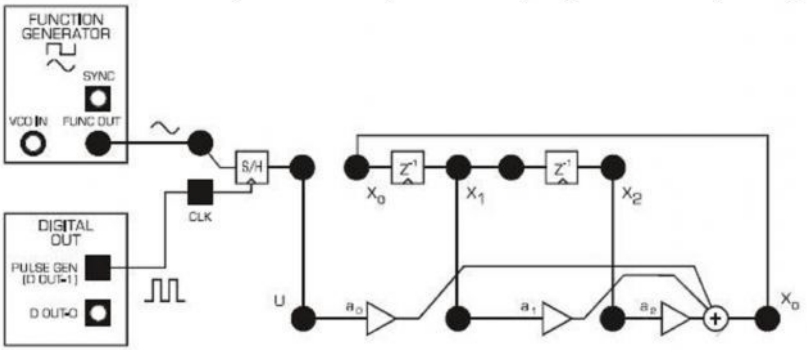

Рис 3. Модель SIGEx для рис. 1

1. Соберите модель SIGEx, изображенную на рис. 3.

Настройки:

- коэффициенты сумматора: $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}6$; $a_2 = -0{,}902$;
- генератор пульсаций: 20 кГц, коэффициент нагрузки 0,5 (50 %);
- генератор функций: синусоида, 1 кГц (частота будет изменяться в процессе снятия частотной характеристики), 2 В;
- осциллограф: развёртка 4 мс, триггер - на входной сигнал, уровень переключения 0 В.

Вопрос 10. Вычислите полюса, соответствующие этим значениям. Измерьте и запишите модуль реакции на выходе обратной связи в функции частоты. Запишите значение резонансной частоты и частоты полосы пропускания. Как, используя полюса, можно графически предсказать эти частоты.

Вопрос 11. Слегка (на 5-10 %) уменьшите $|a_1|$ и измерьте изменения резонансной частоты и частоты полосы пропускания. Для объяснения полученного результата используйте изменения положения полюсов?

Вопрос 12. Верните коэффициент a_1 на прежнее место. Уменьшите a_2 на 5 %. Сравните эффект от изменения a_1 и a_2. Какой из них можно использовать для регулировки резонансной частоты?

Примечание: Вкладка PZ Plot программного интерфейса SIGEx.

Позволяет вычислять нули и полюса на основе текущих коэффициентов сумматора. Вы можете применить этот инструмент, чтобы убедиться в правильном понимании сути работы. Вы можете переключаться между вкладкой эксперимента и вкладкой PZ Plot когда пожелаете.

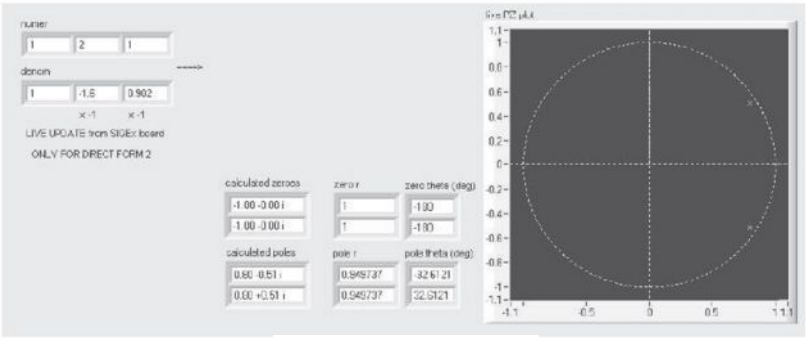

Рис. 4. Вкладка PZ Plot

Вопрос 13. Оставив a_1 нетронутым, понемногу увеличивайте a_2**,** и следите за поведением резонанса. Продолжайте, пока не появятся признаки нестабильного поведения. В этот момент, отключите входной сигнал, и следите за выходным. Это синусоида? Измерьте и запишите эту частоту. Измерьте a_2. Вычислите и зарисуйте положение полюсов. Особо отметьте, находятся ли они внутри или снаружи единичной окружности.

Часть 2. БИХ фильтр с положительной обратной связью. Фильтры второго порядка

В этой части мы соберем и исследуем систему, изображенную на рис. 5. Обратите внимание, что система с опережающей связью просто дополняет предыдущую систему – систему только с отрицательной обратной связью. Она также имеет дополнительную точку выхода x_0. Опережающая связь только добавляет числитель в общую передаточную функцию, которая является отношением сигналов y/u.

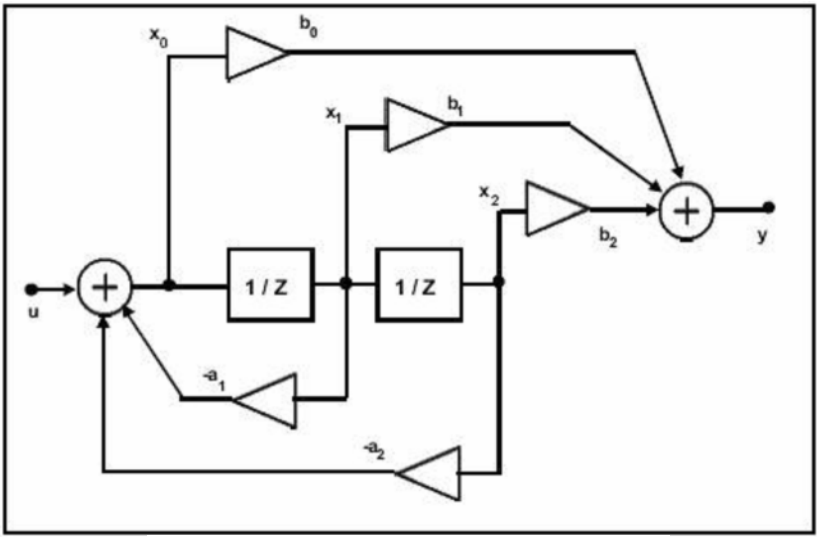

Рис. 5. Блок-диаграмма системы 2-го порядка

На рис. 6 представлена структурная схема исследуемой системы с необходимыми для исследования блоками.

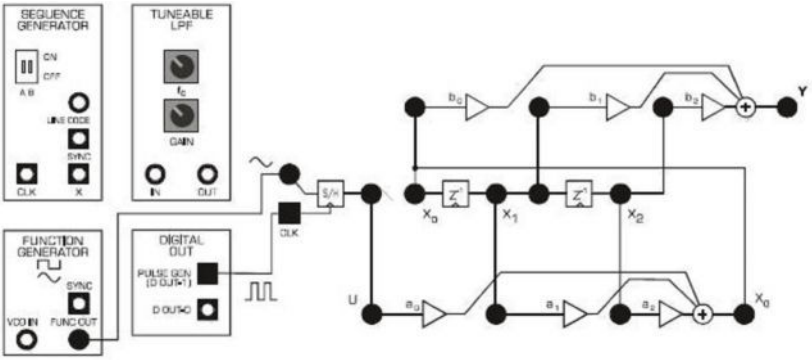

Рис. 6. Схема соединений для блок-диаграммы с рис. 8

2. Рассмотрим случаи, теоретически исследованные в подготовительной работе (вопрос 7).

Настройки:

▪ коэффициенты сумматоров: $b_0 = 1$; $b_1 = 2$; $b_2 = 1$; $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}6$; $a_2 = -0{,}902$;

▪ генератор пульсаций: 20 кГц, коэффициент нагрузки 0,5 (50 %);

▪ генератор функций: синусоида, 1 кГц, 1 В

▪ осциллограф: развёртка 4 мс, триггер на входном сигнале, уровень переключения 0В

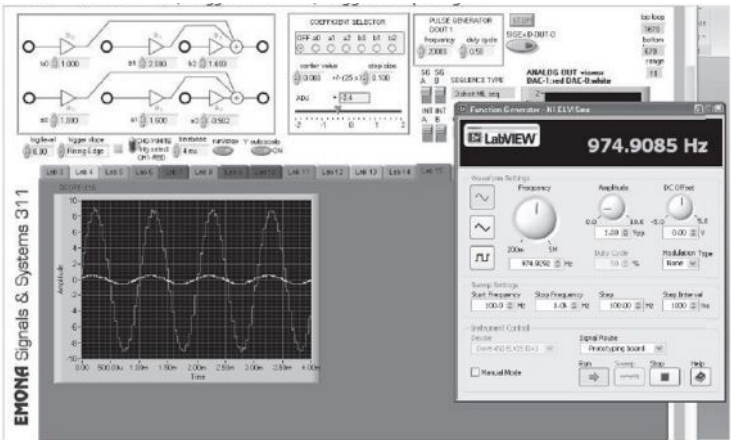

Рис. 7. Использование генератора функций для развёртывания синусоиды в нужном спектре

Полюса получившегося фильтра находятся очень близко к единичной окружности, как показано на рис. 8.

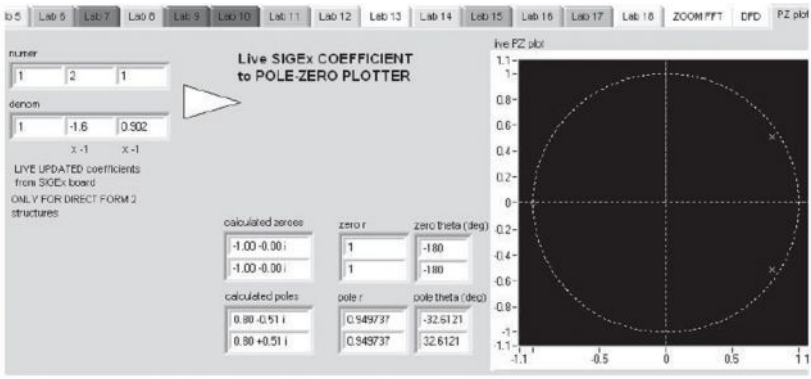

Рис. 8. Вкладка PZ Plot для текущих настроек

Полюса очень близки к единичной окружности. По сути, радиус полюсов составляет 0,95. Следовательно, такой фильтр будет иметь большой коэффициент усиления на низких частотах.

Измерьте модуль частотной характеристики $|y/u|$ и убедитесь, что это ФНЧ.

Вопрос 14. В модели из шага 2 настройте a_2 так, чтобы свести пик амплитудной частотной характеристики до минимума. При необходимости уменьшите амплитуду входного сигнала до 0,5 В, чтобы избежать насыщения выходного сигнала. Для этого наблюдайте выходной сигнал на частоте пика и корректируйте значение коэффициента a_2. Вычислите и зарисуйте новые полюса. Проведите измерение амплитудной частотной характеристики с новыми

значениями полюсов. Как это измерение согласуется с теоретической графической оценкой модуля? Почему использовался a_2 вместо a_1.

Вопрос 15. Измените знак коэффициента b_1 и покажите, снятием амплитудной частотной характеристики, что в результате получится ФВЧ. Сравните результат с вопросом 7.

Вопрос 16. Установите $b_0 = 1$; $b_1 = 0$; $b_2 = –1$; $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}6$; $a_2 = –0{,}902$. Убедитесь, что получился полосовой фильтр.

Настройте a_1 и a_2, чтобы получить пик на 3,1 кГц и полосу пропускания на 3 дБ 500 Гц. Измерьте получившиеся a_1 и a_2 и зарисуйте новые полюса. Сравните с результатами из вопроса 9.

Вопрос 17. Примените следующий случай: $b_0 = 0{,}8$; $b_1 = 0$; $b_2 = 1$; $a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0{,}8$. Обратите внимание, что $b_0 = a_2$ и $b_1 = a_1$. Измерьте модуль частотной характеристики. Убедитесь, что получился всепропускающий фильтр. Отметьте положение полюсов и нулей.

Справочный материал

Частотные характеристики фильтра

```
%---------------АЧХ ФИЛЬТРА-----------------
f = [0:1e-3:1]*fd;
H = freqz(b,a,2*pi*f/fd);
figure
plot(f,20*log10(abs(H)))
grid
```

Отображение нулей и полюсов фильтра

```
zplane (z, p)
zplane (b, a)
```

Входными параметрами являются векторы-столбцы нулей и полюсов `(z, p)` либо векторы-строки коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи `(b, a)`.